目　录

序 …………………………………………………………… v

第一章　基本概念 …………………………………………… 1

§1 引言 …………………………………………………… 1

§2 集合的表示方法 ……………………………………… 4

§3 外延原则 ……………………………………………… 6

§4 空集合与无序对集合 ………………………………… 7

§5 并集合 ………………………………………………… 9

§6 子集合 ………………………………………………… 11

§7 集合的交与相对补 …………………………………… 14

第二章　证明与逻辑 ………………………………………… 19

§1 关于并、交、补的几个性质 ………………………… 19

§2 命题与命题连接词 …………………………………… 21

§3 命题与公式的形成规则 ……………………………… 23

§4 命题的真值与命题连接词的真值表 ………………… 27

§5 永真命题 ……………………………………………… 31

§6 反证法与归谬律 ……………………………………… 36

§7 蕴涵推演法与双蕴涵推演法 ………………………… 39

第三章　集合的初等运算 …………………………………… 44

§1 集合代数 ……………………………………………… 44

§2 集合代数的几个定律 ………………………………… 51

§3 对称差及其性质 ……………………………………… 55

第四章　极小元与正则公理………………………………… 59
§1 不空集合的极小元………………………………… 59
§2 正则公理………………………………………… 60
§3 奇异集合………………………………………… 63
§4 本元……………………………………………… 66
§5 关于逻辑词的几项缩写……………………………… 67
第五章　自然数集合与数学归纳法………………………… 70
§1 自然数…………………………………………… 70
§2 无穷公理………………………………………… 72
§3 归纳集合与数学归纳法……………………………… 73
§4 自然数集合的性质………………………………… 76
§5 自然数算术……………………………………… 80
§6 算术加法与乘法的初等性质………………………… 84
第六章　幂集合…………………………………………… 90
§1 幂集合存在公理…………………………………… 90
§2 有穷集合的幂集合………………………………… 91
§3 幂集合的初等性质………………………………… 99
§4 幂集合与传递集合………………………………… 102
第七章　集合的广义并与广义交…………………………… 105
§1 集合的广义并……………………………………… 105
§2 集合的广义交……………………………………… 109
§3 对传递集合的封闭性……………………………… 112
*§4 有关广义并和广义交的某些定律…………………… 114
第八章　笛卡尔积与分离公理……………………………… 120
§1 有序对…………………………………………… 120
§2 笛卡尔积………………………………………… 122

§3 分离公理模式 …… 124
§4 分离公理模式的推论 …… 128
第九章　关系、函数 …… 134
§1 关系 …… 134
§2 n元关系 …… 136
§3 关系的表示法 …… 137
§4 关系的逆、复合、限制和象 …… 142
§5 函数 …… 145
§6 函数的性质、选择公理 …… 149
*§7 函数的相容性 …… 155
第十章　自然数的函数、递归定理 …… 159
§1 有穷集合上的函数与抽屉原理 …… 159
§2 算术差$-\omega$与算术商$\div\omega$ …… 163
§3 配对函数 …… 168
*§4 递归定理 …… 170
第十一章　超幂与超积 …… 176
§1 超幂 …… 176
§2 超幂的性质 …… 185
§3 超积 …… 187
*§4 乘积定理 …… 198
第十二章　偏序结构与良基关系 …… 200
§1 弱偏序 …… 200
§2 强偏序、偏序 …… 204
§3 序的基本概念 …… 208
§4 极小元与极大元 …… 215
§5 线序、链 …… 216
§6 良基关系 …… 220

§7 树 …… 224
第十三章 等价与同构 …… 228
§1 等价类及其相应的关系 …… 228
§2 划分 …… 232
§3 商集合与采样集合 …… 234
§4 等价关系与函数 f 的相容性 …… 236
§5 同构 …… 241
第十四章 整数与有理数 …… 249
§1 整数 …… 249
§2 有理数 …… 260
第十五章 实数的构造 …… 266
§1 基本函数与基本序列 …… 266
§2 基本序列的等价关系和实数的定义 …… 270
§3 实数的自然次序与四则运算 …… 271
§4 实数的完备性定理 …… 274
第十六章 序数与超穷归纳法 …… 278
§1 序数的定义 …… 278
§2 序数的性质 …… 282
§3 超穷归纳法 …… 287
第十七章 集合的势 …… 290
§1 基本概念 …… 290
§2 康托尔-伯恩斯坦定理 …… 293
§3 可数集合 …… 296
§4 可数集合的主要性质 …… 300
§5 实数集合 R 是不可数的 …… 303
附录 集合论的公理系统 …… 307
参考文献 …… 310

第一章　基本概念

从某种意义上来说，集合论是数学的基础．从集合论的角度分析和考察初等数学，可以对问题有更清晰更深刻的理解．这对于中学数学教育无疑是有益的．现代数学的各个分支其基础部分都与集合论有着密切的关系，并且它们又不断地向集合论提出新问题，反过来又推动集合论的发展．

§1　引　　言

什么是集合呢？我们把它当作一个不加定义的基本概念，也是本书中唯一的不加定义的概念（有时也用到类的概念，但可以不作为基本概念，有的集合论系统，用类作为基本概念，把集合定义为满足一定限制条件的类）．在平面几何中，大家知道，点、线、面都是不加定义的基本概念，在那里是通过几何公理表现出点、线、面的关系的．在本书中，我们是从集合这一基本概念着手，逐步引伸出集合论的有关概念、公理和问题，并建立相应的定理和方法．

虽然集合是一个不加定义的概念，然而却是一个人们容易理解和把握的概念．事实上，每一个人都知道许多集合．三只羊可以组成一集合，五只鸡可以组成一集合，同样，二十

六个英文字母可以组成一集合，数 0，1，2，3 也可以组成一集合.

集合是把人们的直观的或思维中的某些确定的能够区分的对象汇合在一起，使之成为一个整体(或称为单体)，这一整体就是一个集合. 组成一集合的那些对象称为这一集合的元素(或简称为元). 任何类型的对象都可以作为一集合的元素，特别是集合也可以作为对象，亦即一集合可以是其它集合的元素. 当我们用字母 S 表示一集合，a 是集合 S 的一个元素时，就叫做 a 属于集合 S，这时就记做

$$a \in S,$$

其中符号 $\in$ 表示"属于"或"元素关系"或"属于关系". 当 b 不是 S 的一元素时，人们常常记做

$$a \notin S,$$

其中符号 $\notin$ 表示"不属于". "$b \notin S$" 读做 b 不属于 S.

例 1 令 S_1 是由 0，1，2，3 这四个数组成的集合，并且记做

$$S_1 := \{0, 1, 2, 3\},$$

其中花括号内的对象(在这里是数 0，1，2，3)是这一集合的元素，确切地说，凡是这一集合的元素都写在花括号内，不是它的元素都不写在花括号内. 符号"$:=$"表示左边是由右边定义出来的. 这时，$0 \in S_1$，$1 \in S_1$，$2 \in S_1$，$3 \in S_1$，但是 $4 \notin S_1$，$5 \notin S_1$ 等等.

例 2 令 S_2 是由 26 个小写英文字母组成的集合，亦即：

$$S_2 := \{a, b, c, d, \cdots, w, x, y, z\},$$

这时，$a\in S_2$，$b\in S_2$，$c\in S_2$ 等等，并且也有 $1\notin S_2$，$2\notin S_2$ 等等.

例 3 令 S_3 是某中学初一甲班全体学生组成的集合. 当张三是该班的一个学生时，我们就说张三是集合 S_3 的一个元素，并记做"张三 $\in S_3$". 当李四不是该班的一个学生时，我们就记做："李四 $\notin S_3$". 意思是指："李四不是集合 S_3 的一个元素".

我们为什么能够把某校初一甲班的学生汇集成一个集合 S_3 呢？因为一个学生是否在该班这是确定的，张三是甲班的学生，李四不是该班的学生，这些都已确定，毫不含糊. 同时甲班的若干个学生相互都是能区别的. 虽然，张三、王五都是甲班的学生，但他们是两个不同的学生，人们能够区别他们谁是王五、谁是张三. 这些都是从我们的常识所能知道的.

又如，在通常的情况下，甲班的男生可以组成一个集合 S_4，甲班的女生可以组成另一集合 S_5，因为，这些对象都是"确定的，能够区分的". 但是，"甲班的所有高个子的学生"不能组成一集合，这是因为，什么是"高个子"？这是一个不确定的、不清晰的概念. 身高一米八的是高个子，身高一米七五、一米七三或一米七一、一米六九的是否是高个子呢？这里没有一个确定的清晰的界限. 同样，甲班所有小个子的学生也不能组成一个集合，它也没有一个确定的清晰的界限. 象这类不确定不清晰的对象都不是古典集合论的研究对象，不是本书所要讲的"集合".

还有更复杂的集合，也可以把一些集合汇合成一个整体形成新的集合. 例如，令 S 是这样的一集合，它的元素恰好是

上述三个例子给出的集合 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. 亦即

$$S:=\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\},$$

这个集合有五个元素 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, 亦即我们有: $S_1 \in S$, $S_2 \in S$, $S_3 \in S$, $S_4 \in S$, $S_5 \in S$. 虽然 $0 \in S_1$ 且 $S_1 \in S$, 但是 $0 \notin S$. 假如我们令 S_6 是由 1 与 S_1 组成的一集合,亦即

$$S_6:=\{1, S_1\},$$

这时, $1 \in S_1$ 且 $S_1 \in S_6$, 而且还有 $1 \in S_6$.

这样,任给一对象 a (它也可以是一集合) 和一个集合 S, 是否 $a \in S$ 成立呢? 这要看它们是由什么决定的. 要看集合 S 含有哪些元素而决定. 一集合由它们的元素所决定, 这正是我们在 §3 中将要讨论的外延原则的基本内容.

§2 集合的表示方法

在 §1 的例 1 与例 2 中,为了给出一集合, 我们是列举出该集合的元素, 这种列举元素的方法好处是具有显明性. 比如 $S_1:=\{0, 1, 2, 3\}$, 我们一眼就看出它只有四个元素, 并且这些元素分别是 0, 1, 2, 3, 但是, 在有些情况下, 这样做是很不方便的. 比如令集合 S_7 为:

$$\{5832, 6859, 8000, 9261, 10648, 12167, 13824\}. \quad (1.1)$$

(1.1) 式所确定的集合就有点烦琐了,如果比 13824 还大的数目再列出几个, 几十个或几百个, 那就更加复杂甚至无法写出, 然而当我们分析一下 S_7 的元素的性质时, 就会发现这些数是有规律的,它们是从 18 到 24 之间的这七个数的立方数,

亦即当 x 满足条件 $18 \leqslant x \leqslant 24$ 时，S_7 的元素恰好为 x^3. 这样，就令

$$\{y \mid x \text{ 是一整数，且 } 18 \leqslant x \leqslant 24,\ y = x^3\}, \qquad (1.2)$$

其中竖线"|"的前边为所定义的集合的元素，它必须满足竖线后边所列举的条件，亦即"x 是一整数，且 $18 \leqslant x \leqslant 24$，$y = x^3$". 这一条件也叫做一性质. (1.2) 式表明所定义的集合的元素都具有性质为"把这个元素开立方，立方根为 18 与 24 之间(包括 18 与 24 在内)的整数". 不难验证，它的元素恰好是在(1.1)中所列举的那些数. 因此，我们说，(1.1)与(1.2)定义了同样的集合，亦即上述集合 S_7.

当我们把(1.2)式中的条件改为"x 是一整数且 $10 \leqslant x \leqslant 108$，$y = x^3$"时，所定义的集合为 S_7'，如果要用类似于 (1.1) 那样的显式去列举 S_7' 时，是很烦琐的事，为了方便，简洁地给出一个集合，就需要采用象 (1.2) 那样的定义方式，我们称这种方式为条件定义集合的方式[1]. 事实上，上节的例 3 中，集合 S_3, S_4, S_5 我们都是采用这样方式给出的. 比如 S_3 就是:

$$\{x \mid x \text{ 是某校初一甲班一学生}\},$$

请读者自行给出上述集合 S_4, S_5 的定义条件.

一集合是用某一条件定义的，这时就称这一条件为该集合的定义条件. 然而漫无限制地使用条件去定义集合，会引

---

1) 用条件定义集合的方式并不是一种能够普遍进行的方式，有些条件是不能定义集合的. 能够定义集合的条件是需要用公理来保证的，由公理保证能够定义集合的条件，我们称做合法条件，在本书中，我们将列出这些合法的条件.

起混乱，导致矛盾．因此必须对如何形成集合的原则一一明确提出，只能按照规定的原则形成集合，才可能避免已知的一些集合论悖论．这些原则称为集合论公理．

§3 外延原则

一个集合是由它的元素完全决定的，而不管它的其它性质如何，比如，上节已指出的，不管它的表示方法，也不考虑定义它的条件的含义，及其它可能附加的条件．所谓外延性就是不考虑条件的含义，性质和内涵，而是只考虑满足这一条件的那些对象，或具有这一性质的那些对象．由于这一基本点，我们就给出了二个集合相等的充分条件．也就是说，“任意给定的两个集合 S_1，S_2，当我们已知，对于任意的对象 a，若 $a \in S_1$，则有 $a \in S_2$，并且若 $a \in S_2$，则有 $a \in S_1$；这时，我们就断定有 $S_1 = S_2$”．这就是外延原则．

外延原则也叫外延公理．它是“一集合是由它的元素所完全决定的”一个具体的表达方式，也是判断两个已知集合是否相等的一个具体的方法

例 令

$$S_1 := \{x \mid (x-3)(x-5)(x-7)=0\},$$

$$S_2 := \{x \mid x \text{ 是一素数且 } 2 < x < 10\}.$$

上述定义 S_1 的条件 $(x-3)(x-5)(x-7)=0$ 是一个方程式，满足这一方程式的数亦即它的解集合就是 S_1，所以集合 S_1 就是 $\{3, 5, 7\}$，上述定义 S_2 的条件是“x 是一素数且它

既大于 2 又要小于 10”，不难验证，它也是集合$\{3, 5, 7\}$. 由外延公理，即得 $S_1 = S_2$.

当我们已知两个集合 S_1 与 S_2 是相等时，即 $S_1 = S_2$，并且对于任意的对象 a，我们已知 $a \in S_1$，这时是否 $a \in S_2$ 呢？我们的回答是肯定的，若 $a \in S_2$，则 $a \in S_1$. 这一肯定的答案是关于相等符号即等词或等号“ $=$ ”的逻辑规则所规定的. 也就是说“对于任意的对象 a，若 $a \in S_1$，则 $a \in S_2$，且若 $a \in S_2$，则 $a \in S_1$”构成了 $S_1 = S_2$ 的一个必要条件. 因此人们常常把**外延公理**陈述为：

对于任意的集合 S_1 和 S_2，$S_1 = S_2$ 当且仅当对于任意的对象 a，都有若 $a \in S_1$，则 $a \in S_2$；若 $a \in S_2$，则 $a \in S_1$. 换句话说，$S_1 = S_2$ 当且仅当 S_1 与 S_2 有相同的元素. 对此有兴趣的读者可参阅谓词演算的有关文献，例如本书后边列的文献[1、2].

§4 空集合与无序对集合

定义 1.1 没有元素的集合叫做空集合.

空集合是否存在呢？如果它是存在的，那么由外延公理它是唯一的. 条件 $x \neq x$ 可以定义空集合，令

$$S := \{x \mid x \neq x\},$$

这里 x 可以是任意的对象，由等号的逻辑规则，对于任意的对象 a 都有 $a = a$，因此，$a \neq a$ 的对象是不存在的，所以，上述 S 如果是一集合，则 S 没有任意元素. 当然，能够定义一集合

的条件是需要由公理来保证的.

空集合存在公理 存在一个集合，它没有任何元素. 换句话说，空集合是存在的.

空集合存在公理常常简称为空集合公理，由它和外延公理，空集合是存在唯一的，并且记做符号$\varnothing$. 由定义 1.1，对于任意的对象 a，都有 $a \notin \varnothing$.

推论 1.1 对于任意对象 a，都有 $a \notin \varnothing$.

定义 1.2 对于任意给定的两个对象 a 与 b，集合 $\{a, b\}$ 称做对象 a 与 b 的无序对集合，也就是说，这一集合有两个元素，一个是 a，一个是 b.

由于 a, b 是任意两个对象，它们可以相等，也可以不相等. 当 $a = b$ 时，$\{a, b\}$ 可以记做 $\{a\}$ 或 $\{b\}$，并且称之为单元集合. 换言之，单元集合是无序对集合的一种特殊情况，只有一个元素的集合叫做单元集合.

任给二个对象 a 与 b，无序对集合 $\{a, b\}$ 可以用条件“$x = a$ 或 $x = b$”来定义. 允许这样定义集合，即:

无序对集合存在公理 对于任意的二个对象 a 与 b，都存在一个集合 S，使得 S 恰有两个元素，一个是对象 a，一个是对象 b.

由外延公理，对于任意的对象 a 与 b，由它们组成的无序对集合是唯一的，并且记做 $\{a, b\}$.

我们已有空集合 $\varnothing$，现在从$\varnothing$开始，由上述公理我们有单元集合$\{\varnothing\}$. 这一集合只有一个元素$\varnothing$，$\{\varnothing\}$与$\varnothing$不同，前者有一个元素$\varnothing$，后者一无所有.

现在我们从∅,{∅}开始,我们可以构造集合{∅,{∅}},它有元素∅与{∅},并且还可以构造集合{{∅}},它是{∅}的单元集合,这一集合只有一个元素{∅}. 由此,我们也可以构造集合{{{∅}}}, {{∅, {∅}}}, {{∅},{ϕ,{∅}}}等等更为复杂的集合,但是,不管怎样,我们只能构造具有一个元素和二个元素的集合,而不能汇合更多的元素组成新的集合. 为了获得具有更多元素的集合,我们引入并集合公理.

§5 并 集 合

定义 1.3 对于任意的两个集合 S_1 与 S_2,我们把 S_1 的元素与 S_2 的元素汇合在一起组成一个新的集合 S. 并且称 S 为 S_1 与 S_2 的并集合,记做 $S_1 \cup S_1$,亦称 S_1 并上 S_2(参见图 1).

集合 $S_1 \cup S_2$ 可以用条件"$x \in S_1$ 或 $x \in S_2$"来定义. 然而,这一条件是否能够定义一集合呢? 换句话说,对于任意的集合 S_1 与 S_2,是否存在一并集合 $S_1 \cup S_2$ 呢? 当然,如果存在的

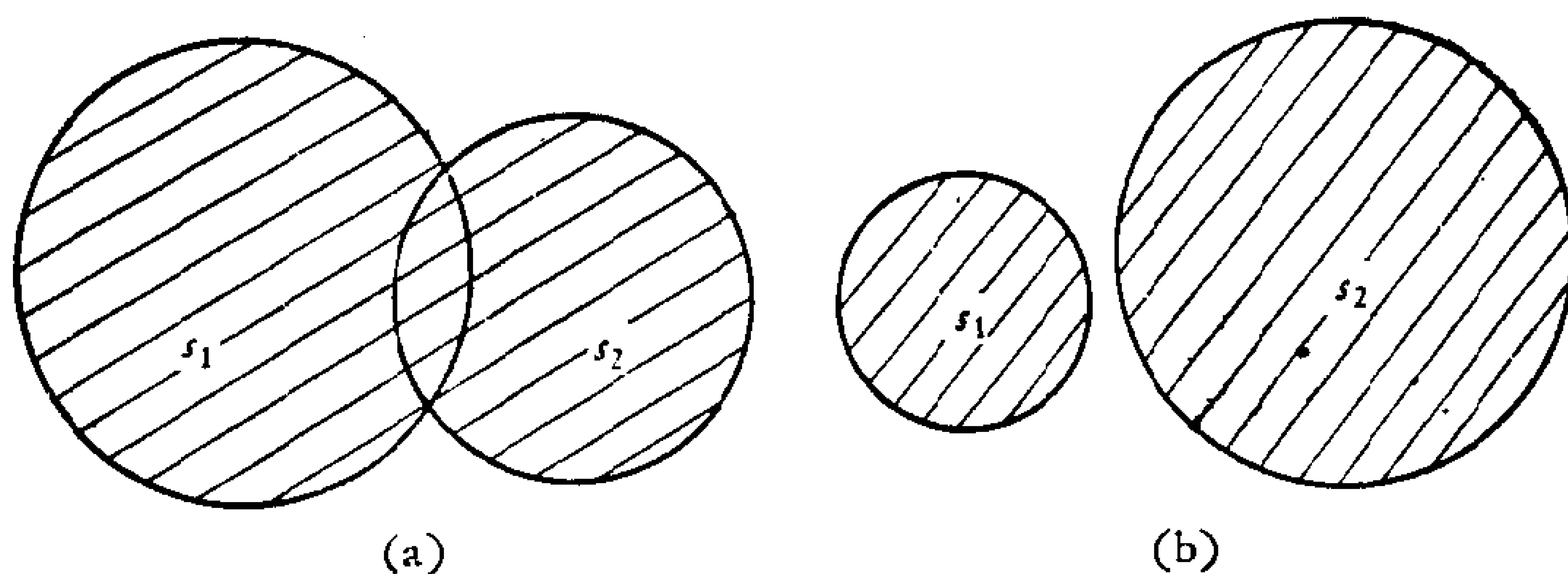


图 1　二集合的并的示意图

话，由外延公理，它就是唯一的，并且记做 $S_1 \cup S_2$，也就说 $S_1 \cup S_2$ 是合法的集合了(合乎公理的规定了).

并集合公理(简单形式) 对于任意的集合 S_1 与 S_2，都存在一个集合 S，它的元素是由 S_1 的元素与 S_2 的元素所组成.

例 我们已经有集合 $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ 和 $\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$，这样就有 $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\cup\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$，亦即有集合：

$$\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}.$$

类似地，我们已经有集合 $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ 和 $\{\{\{\varnothing\}\}\}$，这样就有 $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\cup\{\{\{\varnothing\}\}\}$，亦即有集合：

$$\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}.$$

定义 1.4 令

$0:=\varnothing$,

$1:=\{0\}$, (亦即 $\{\phi\}$)

$2:=\{0,1\}$,

$3:=2\cup\{2\}=\{0,1,2\}$,

$4:=3\cup\{3\}=\{0,1,2,3\}$.

我们已知 $\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ 都是由公理的保证良好定义了的集合，而从 2，我们能够定义 2 的单元集合 $\{2\}$，由 2 及 $\{2\}$，使用上边陈述的两个集合的并集合公理，就保证了集合 3 的合法性，同样，从 3 的合法性，可以获得 4 的合法性.

由上述论证，我们还可以看出，0 没有元素，1 有一个元素，2 有二个元素，3 有三个元素，4 有四个元素. 这样，用这些集合来定义和刻划相应的数还是很合理的. 而且，以后我们将会看到它有许多优点. 一般说来，假定我们已经定义了

数 n，这时，我们令

$$n+1:=n\cup\{n\}.$$

定义1.5 对于任意的集合 S，我们令

$$S^{+}:=S\cup\{S\}.$$

并且称 S^{+} 为 S 的后继.

因为已知 S 为一集合，这样就有它的单元集合 $\{S\}$，由二个集合 S 与 $\{S\}$，使用二个集合的并集合公理，因此集合 S^{+} 的定义是合法的.

定义 1.6 对于一个集合，如果它是空集合 $\varnothing$（亦即0），或者有一自然数 n，使得 $S=n^{+}$，则我们称 S 为一个自然数.

§6 子集合

定义 1.7 对于任意的集合 S_1 与 S_2，当 S_1 的每一个元素都是 S_2 的元素时，就称集合 S_1 是 S_2 的子集合，并且记做

$$S_1\subset S_2.$$

换言之，$S_1\subset S_2$ 就意味着，对于任意的对象 a，若 $a\in S_1$，则 $a\in S_2$.

当 $S_1\subset S_2$ 成立时，也称 S_1 包含在 S_2 中，或称 S_2 包含 S_1.

当 S_1 不是 S_2 的子集合时，亦即 $S_1\subset S_2$ 不成立时，记做 $S_1\not\subset S_2$. 这种情况就是说存在一对象 b，$b\in S_1$ 但 $b\notin S_2$.

对于集合 S_1 包含在集合 S_2 中，亦即 $S_1\subset S_2$ 成立，集合 S_3 不包含在 S_4 中，亦即 $S_3\not\subset S_4$ 成立，我们可以用图形加以形象的说明（参见图 2）

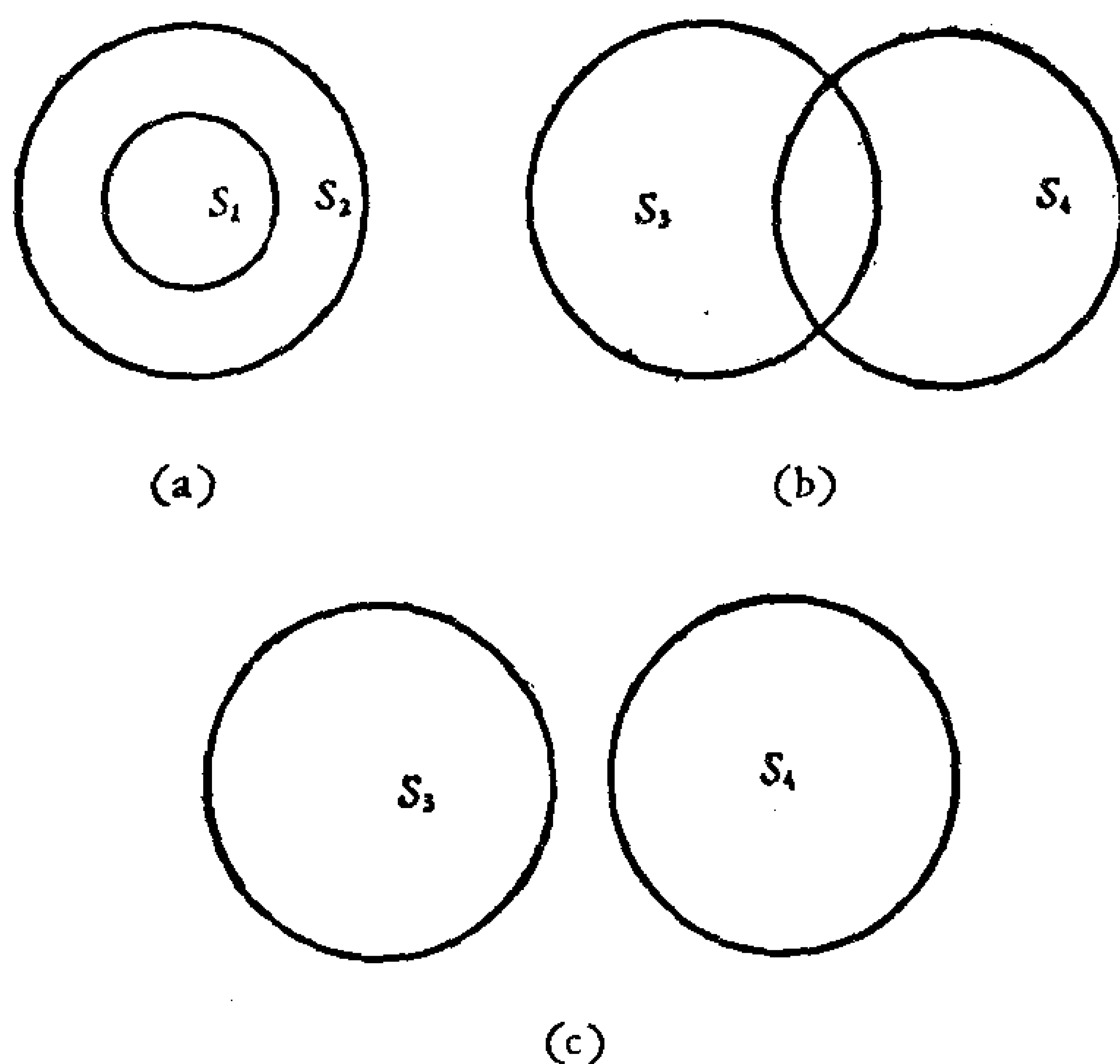


图2　包含与不包含示意图

图 2(a) 说明集合 S_1 是 S_2 的一部分，也就是 $S_1 \subset S_2$. 图 2(b) 说明虽然 S_3 的一部分元素在 S_4 中，但 S_3 还有一部分元素不在 S_4 中，这时 $S_3 \not\subset S_4$ 成立并且 $S_4 \not\subset S_3$ 成立. 图 2(c) 说明，S_3 的任一元素都不在 S_4 中，并且 S_4 的任一元素也不在 S_3 中. 据包含的定义，当然 $S_3 \not\subset S_4$ 并且 $S_4 \not\subset S_3$ 成立.

例如　$\{0, 1\} \subset \{0, 1\}$;

$\{0, 1\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$;

$\{\{2\}\} \subset \{0, 1, \{2\}\}$;

$\{0, 2\} \not\subset \{0, 3, 4\}$;

$\{3\} \not\subset \{\{3\}, 4, 2\}$.

注意：不要把元素关系 $\in$ 与包含关系 $\subset$ 相混淆，实际上它们是不相同的. 例如:

$\{4\}\not\subset\{\{4\},0\}$，但 $\{4\}\in\{\{4\},0\}$；

$\{0,1\}\subset\{0,1,\{1\}\}$，但 $\{0,1\}\notin\{0,1,\{1\}\}$.

$\in$ 与 $\subset$ 不相同，还有一个重要之点是，$\in$ 是原始符号，是集合论的原始概念，而 $\subset$ 不是原始概念，而是从 $\in$ 出发被定义出来的概念.

定理 1.1 对于任意的集合 S，都有 $\varnothing\subset S$. 也就是说，空集合 $\varnothing$ 是任一集合 S 的子集合.

证明 如果有一集合 S，$\varnothing\not\subset S$，那么有一元素 a，使得 $a\in\varnothing$，$a\notin S$. 但是由 $\varnothing$ 的定义，$a\in\varnothing$ 是不可能的，与 $\varnothing$ 的定义相矛盾，所以 $\varnothing\subset S$ 成立.

定理 1.2 对于任意的集合 S_1，S_2 与 S_3，有：

(1) $S_1\subset S_1$，

(2) 若 $S_1\subset S_2$ 且 $S_2\subset S_1$，则 $S_1=S_2$，

(3) 若 $S_1\subset S_2$ 且 $S_2\subset S_3$，则 $S_1\subset S_3$.

证明 先证 (1)，"对于任意的对象 a，若 $a\in S_1$，则 $a\in S_1$"，这总是成立的. 对于一切集合 S_1，这都是成立的. 因此，在一切情况下(1)都成立.

再证(2)，对于任意的对象 a，若 $a\in S_1$，由 $S_1\subset S_2$，则 $a\in S_2$，另一方面，若 $a\in S_2$，由 $S_2\subset S_1$，则 $a\in S_1$. 也就是说，S_1 与 S_2 满足外延公理的前提，所以，由外延公理，我们有 $S_1=S_2$.

最后证 (3)，对于任意的对象 a，若 $a\in S_1$，因 $S_1\subset S_2$，故 $a\in S_2$，再根据 $S_2\subset S_3$，就有 $a\in S_3$，因此，由定义 1.7，得到，$S_1\subset S_3$.

定理 1.2(1) 是说，对于任意的集合来说，它都是它自身

的一个子集合．再由定理 1.1，立即获得下面的推论．

推论 1.2 对任意不空的集合 S，它至少有两个子集合，一个是空集合 $\varnothing$，一个是它自己，即 S.

定义 1.8 对于任意的集合 S_1 与 S_2，当 $S_1 \subset S_2$ 且 $S_1 \neq S_2$ 时，就称 S_1 为 S_2 的真子集合．这时，记做 $S_1 \subset_+ S_2$.

我们说 $S_1 \subset_+ S_2$ 就意味着，第一有 $S_1 \subset S_2$，第二，有一个对象 a，$a \in S_2$ 且 $a \notin S_1$．换句话说，$S_1 \subset_+ S_2$ 就意味着：$S_1 \subset S_2$ 且 $S_2 \not\subset S_1$.

例如

$$\{0,1,\{1\}\} \subset_+ \{0,1,\{1\},2\},$$
$$\{1,2,3\} \subset_+ \{1,2,3,4\},$$
$$\{1,2\} \not\subset_+ \{1,2\}.$$

§7 集合的交与相对补

定义 1.9 对于任意的两个集合 S_1 与 S_2，我们把 S_1 与 S_2 的公共元素汇合在一起组成一个新的集合 S，并且称 S 为 S_1 与 S_2 的交集合，记做 $S_1 \cap S_2$.

集合 $S_1 \cap S_2$ 可以用条件"$x \in S_1$ 且 $x \in S_2$"来定义，然而，定义 1.9 是否合法的呢？也就是说，对于任意的集合 S_1 与 S_2，我们能够把它们的公共元素汇合到一起形成一整体吗？

交集合公理 对于任意的集合 S_1 与 S_2，存在一集合 S，它的元素是由 S_1 与 S_2 的公共元素所组成，也就是说，S 的元素恰是既属于 S_1 又属于 S_2 的那些元素．

由外延公理，对于任意的集合 S_1, S_2，它们的交集合是唯一的．因此，$S_1 \cap S_2$ 存在且唯一，亦即它是合法的．

例如 令 $S_1 := \{0, 1\}$, $S_2 := \{1, 2\}$，这时

$$S_1 \cap S_2 = \{1\}.$$

定义 1.10 对于任意的两个集合 S_1 与 S_2，如果 $S_1 \cap S_2 = \varnothing$，则称 S_1 与 S_2 是不交的．

定义 1.10 是说，对于任意的对象 a，若 $a \in S_1$，则 $a \notin S_2$，并且若 $a \in S_2$，则 $a \notin S_1$．这时，我们就称集合 S_1 与 S_2 是不交的．或者说，S_1 与 S_2 的交集合为空集合 $\varnothing$．

我们也可以用图来说明上述二个定义的直观含义．

图 3(a) 是说，$S_1 \not\subset S_2$ 且 $S_2 \not\subset S_1$，然而它们有若干公共元素．带阴影部分就是它们的交．图 3(b) 是说，$S_3 \subset S_4$，这时

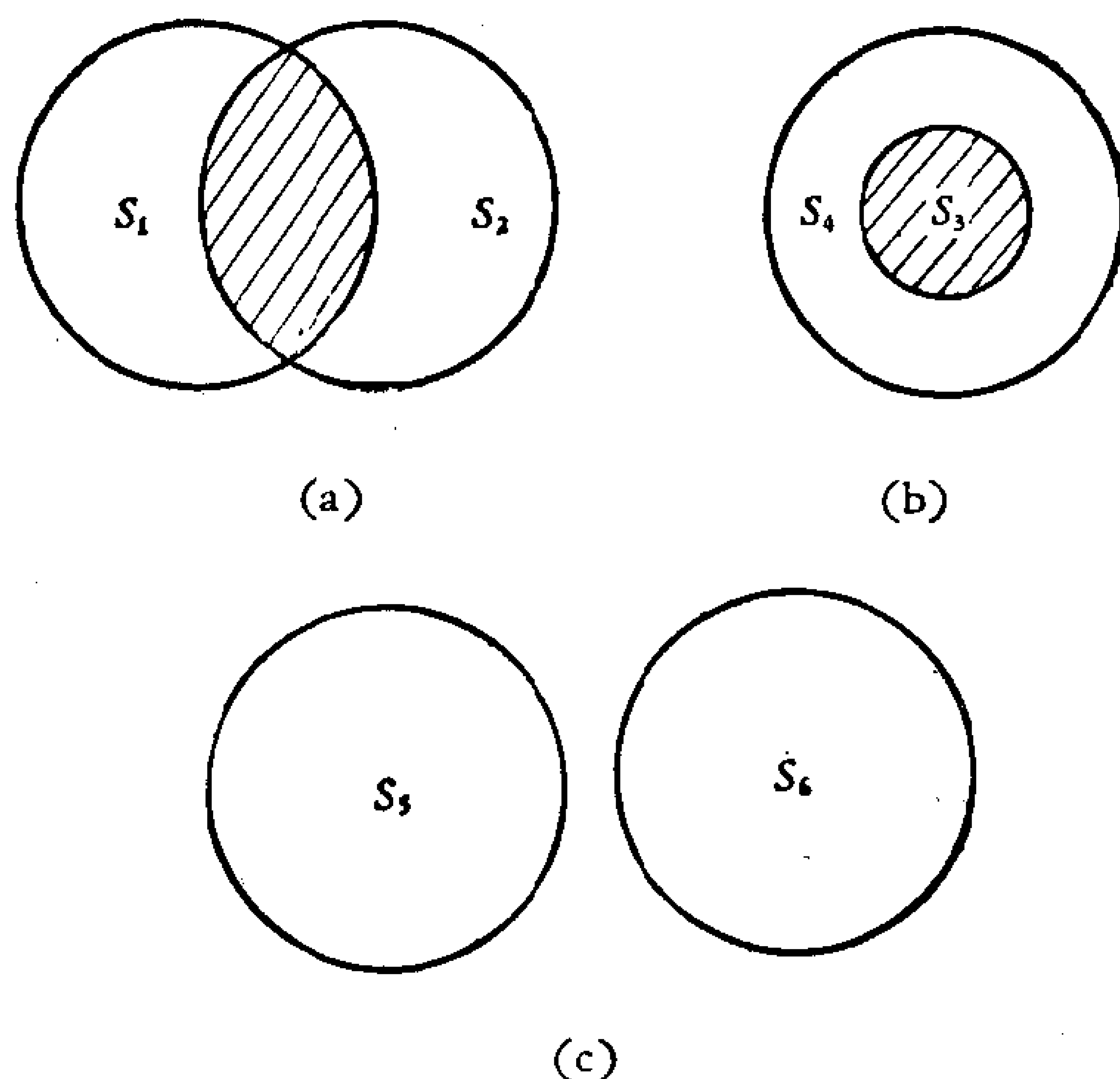


图 3　二集合的交的示意图

$S_3 \cap S_4 = S_3$. 图 3(c) 是说，$S_5 \cap S_6 = \varnothing$，即 S_5 与 S_6 是不交的.

定义 1.11 对于任意的两个集合 S_1 与 S_2，我们把 S_1 中所有那些不属于 S_2 的元素汇合在一起形成一整体，亦即组成一新的集合 S，并称 S 为 S_2 相对于 S_1 的补集合，记做 $S_1 \dot{-} S_2$. 也读做 S_2 对 S_1 之补.

集合 $S_1 \dot{-} S_2$ 可以用条件“$x \in S_1$ 且 $x \notin S_2$”来定义. 然而，集合 $S_1 \dot{-} S_2$ 是合法的吗？也就是说，对于任意的两个集合 S_1 与 S_2 来说，我们能够把 S_1 中含有的 S_2 的元素全部去掉而把剩下的所有元素汇合成一个整体吗？这是需要公理来保证的.

相对补公理 对于任意的两个集合 S_1 与 S_2，都存在一个集合 S，使得 S 的元素恰好是把 S_1 中含有的 S_2 的元素全部去掉而剩下的那些元素.

由外延公理，上述定义的集合 S 是由 S_1 与 S_2 唯一决定的，亦即 $S_1 \dot{-} S_2$ 是合法的.

例如 令 S_1 为 $\{1, 2, 3, 4\}$，S_2 为 $\{1, 3, 4\}$，则

$$S_1 \dot{-} S_2 = \{2\}.$$

又如 令 S_3 为 $\{1, 2, 4, 5\}$，S_4 为 $\{1, 2, 6\}$，则

$$S_3 \dot{-} S_4 = \{4, 5\}.$$

习 题

1. 令 $A := \{3, 4\}$，$B := \{3, 4\} \cup \varnothing$，$C := \{3, 4\} \cup \{\varnothing\}$，$D := \{x \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$，$E := \{\varnothing, 3, 4\}$，$F := \{4, 4, 3\}$，$G := \{4, \varnothing, \varnothing, 3\}$. 问上述集合中，哪些是相等的，哪些是不等的？

2. 判断下述各式哪些是成立的，哪些是不成立的，成立的划“+”，不成立的划“×”。

(1) $\varnothing\subset\varnothing$，

(1) $\varnothing\in\varnothing$，

(3) $\varnothing\subset\{\varnothing\}$，

(4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$，

(5) $\{\varnothing\}\subset\{\varnothing\}$，

(6) $\{\varnothing\}\in\{\varnothing\}$，

(7) $\varnothing\subset\{\{\varnothing\}\}$，

(8) $\varnothing\in\{\{\varnothing\}\}$，

(9) $\{\varnothing\}\subset\{\{\varnothing\}\}$，

(10) $\{\varnothing\}\in\{\{\varnothing\}\}$，

(11) $\{\varnothing\}\in\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，

(12) $\varnothing\in\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，

(13) $\{\{\varnothing\}\}\in\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，

(14) $\{\{\varnothing\}\}\subset\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，

(15) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in\{\{\varnothing\}\}$.

3. 根据定义 1.4，验证：

(1) $0\in 1$，

(2) $0\in 2$ 且 $1\in 2$，

(3) $0\in 3$，$1\in 3$ 且 $2\in 3$，

(4) $0\in 4$，$1\in 4$，$2\in 4$，且 $3\in 4$.

4. 根据定义 1.4，计算：

(1) $3\cup\{4\}=$

(2) $3\cup\{5\}=$

(3) $4\cup 5=$

(4) $5\dot{-}4=$

(5) $(5\dot{-}3)\cup 2=$

(6) $(5\dot{-}3)\cup 3=$

(7) $(4 \dot{-} 2) \cup 3 =$

(8) $4 \cap 3 =$

(9) $\{1, 2, 4\} \cap 3 =$

(10) $\{1, 3, 4\} \cap 4 =$

5.给出下列各集合的所有子集合：

(1) $\varnothing$,

(2) $\{\varnothing\}$,

(3) $\{1\}$,

(4) 2,

(5) 3,

(6) $\{1, 2\}$,

(7) $\{1, 2, 3\}$.

6.证明：$S \cup S_2 = \varnothing$ 当且仅当 $S_1 = \varnothing$ 且 $S_2 = \varnothing$.

7.证明：$S_1 \cup S_2 = S_1 \cap S_2$ 当且仅当 $S_1 = S_2$.

8.证明：$S_1 \dot{-} S_2 = S_2 \dot{-} S_1$ 当且仅当 $S_1 = S_2$.

第二章　证明与逻辑

集合论与数学的其它分支一样，凡是基本结论都要叙述为定理，而每一定理都要求有一个严格的数学证明，证明是从公理(或已被证明的定理)出发，使用逻辑定律(或称规则)逐步地推导出来的.

本章仅初步描述有关定律和方法，并在以后各章的论证中将要多次使用它们. 以后还要逐步引进一些新的定律和方法，希望读者在使用中反复推敲，加深理解，逐步掌握它们.

§1　关于并、交、补的几个性质

定理 2.1　对于任意的集合 S_1 与 S_2，都有:

(1)　　$S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1$,

(2)　　$S_1 \cap S_2 = S_2 \cap S_1$.

证明　先证(1)，对任意的对象 a，若 $a \in S_1 \cup S_2$，由定义1.3，有:"$a \in S_1$ 或 $a \in S_2$"成立，因此也有"$a \in S_2$ 或 $a \in S_1$"成立，所以，就有 $a \in S_2 \cup S_1$. 另一方面，若 $a \in S_2 \cup S_1$，由定义1.3，就有"$a \in S_2$ 或 $a \in S_1$"成立，因此也有"$a \in S_1$ 或 $a \in S_2$"成立. 由此，使用外延公理即得 $S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1$.

再证明(2)，对任意的对象 a，若 $a \in S_1 \cap S_2$，由定义1.9，

就有："$a \in S_1$ 且 $a \in S_2$" 成立．这样，就有："$a \in S_2$ 且 $a \in S_1$" 成立．因此由定义 1.9 有：$a \in S_2 \cap S_1$．另一方面，若 $a \in S_2 \cap S_1$，类似地，可以获得：$a \in S_1 \cap S_2$．由此，依据外延公理，我们就有欲证结果成立，即有：$S_1 \cap S_2 = S_2 \cap S_1$．

定理 2.1(1) 叫做并集合的交换律．(2) 叫做交集合的交换律．

定理 2.2 对任意的集合 S_1，S_2，S_3 都有：

(1) $S_1 \dot{-} S_1 = \varnothing$，

(2) 若 $S_2 \subset S_1$，则 $S_1 \dot{-} (S_1 \dot{-} S_2) = S_2$，

(3) $(S_1 \dot{-} S_2) \dot{-} S_3 = S_1 \dot{-} (S_2 \cup S_3)$．

证明 对任意的对象 a，

(1) 若 $a \in S_1 \dot{-} S_1$，由定义 1.11 就有"$a \in S_1$ 且 $a \notin S_1$" 成立．但这是不可能的，因此，$a \notin S_1 \dot{-} S_1$．由于 a 是任意的对象，$a \notin S_1 \dot{-} S_1$，所以 $S_1 \dot{-} S_1$ 只能是空集合，即

$$S_1 \dot{-} S_1 = \varnothing.$$

(2) 若 $a \in S_1 \dot{-} (S_1 \dot{-} S_2)$，由定义 1.11 就有 $a \in S_1$ 且 $a \notin S_1 \dot{-} S_2$，然而 $a \notin S_1 \dot{-} S_2$，即："$a \in S_1 \dot{-} S_2$" 不成立，亦即"$a \in S_1 \wedge a \notin S_2$" 不成立．由于已有"$a \in S_1$" 成立，所以只能是"$a \notin S_2$" 不成立．因此，必须有 $a \in S_2$．

另一方面，若 $a \in S_2$，由定义 1.11 就有 $a \notin S_1 \dot{-} S_2$．并且由于 $S_2 \subset S_1$，所以由 $a \in S_2$ 就有 $a \in S_1$，由于我们已有"$a \in S_1$ 且 $a \notin S_1 \dot{-} S_2$" 成立．依据定义 1.11，就有 $a \in S_1 \dot{-} (S_1 \dot{-} S_2)$．

由上述两方面，依据外延公理，即得欲证结果．

再证 (3)，若 $a \in (S_1 \dot{-} S_2) \dot{-} S_3$，由定义 1.11 就有 $a \in S_1 \dot{-}$

S_2 且 $a \notin S_3$. 从前者又得到 $a \in S_1$ 且 $a \notin S_2$. 因此，我们有 $a \notin S_2$ 且 $a \notin S_3$。这就意味着不能有“$a \in S_2 \cup S_3$”. 即有：$a \notin S_1 \cup S_2$。所以有“$a \in S_1$ 且 $a \notin S_2 \cup S_3$”成立. 由定义 1.11，即 $a \in S_1 \dot{-} (S_2 \cup S_3)$。

另一方面. 若 $a \in S_1 \dot{-} (S_2 \cup S_3)$,由定义 1.11 有“$a \in S_1$ 且 $a \notin (S_2 \cup S_3)$”成立. 然而，“$a \notin (S_2 \cup S_3)$”意味着“$a \notin S_2$ 且 $a \notin S_3$”. 但是，这时，我们已有“$a \in S_1$ 且 $a \notin S_2$”成立. 亦即有“$a \in S_1 \dot{-} S_2$”成立，由于，已有：“$a \in (S_1 \dot{-} S_2)$ 且 $a \notin S_3$”成立，所以，就有“$a \in (S_1 \dot{-} S_2) \dot{-} S_3$”成立.

由上述两个方面，再使用外延公理，我们获得了欲证结果.

§2 命题与命题连接词

在第一章和本章 §1 中，曾多次谈到：“$a \in S$”，“$a \notin S$”，“$a \in S_1$ 或者 $a \in S_2$”。“$a \in S_1$ 且 $a \in S_2$”，“如果 $a \in S_1$，则 $a \in S_2$”等等. 这些句子可能是真的(或者说是成立的)，也可能是假的（或者说是不成立的). 这些句子就是本书中的命题. 为了论证严谨和避免不必要的重复，有必要较为系统地介绍一些命题和命题连接词的知识.

什么是命题？一陈述句所表达的含义就是一命题. 众所周知，每一陈述句都表达一个含义(即一完整的意思)，其含义符合事实的就是一真命题，否则就是一假命题. 不含有连接词的命题为基本命题或初级命题. 在本书中，初级命题是指

下述两种类型的命题：

(1) $$a \in S_2,$$

(2) $$S_1 = S_2,$$

其中，S_1 与 S_2 为任意给定的集合，a 为任意给定的对象，我们已经指出，对象也可以是集合，亦即 a 也可以是一集合. 并且从理论角度讲，我们可以只讨论集合，不必讨论集合以外的对象. 不去讨论象“张三”、“李四”那样的对象. 因此，我们可以把上述(1)换成：

(3) $$S_1 \in S_2.$$

这样，本书中的初级命题都是指(2)和(3)这样两种形式。一命题如果它不是初级的，我们就称它为一复合命题.

上述出现的“或者”我们将用符号“$\vee$”代表，并称为“析取词”；“且”将用符号“$\wedge$”来代表，并称为“合取词”；“如果……，则……”将用符号“$\rightarrow$”来代表，并称为“蕴涵词”；“非”将用符号“$\neg$”来代表，并称为“否定词”，这样，“$a \notin S$”就是“$\neg(a \in S)$”或省去括号，直接写做“$\neg a \in S$”(亦称“非 $a \in S$”)，“$a \notin S_1 \cup S_2$”就可写做“$\neg a \in S_1 \cup S_2$”.

在我们的论证中还出现这样的句子：“若 $a \in S_1$，则 $a \in S_2$，并且若 $a \in S_2$，则 $a \in S_1$.”对于这个句子，我们可以写做

$$“a \in S_1 \longleftrightarrow a \in S_2”,$$

其中符号“$\longleftrightarrow$”称做“双蕴涵词”.

有时，我们统称上述引进的$\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\rightarrow$，$\longleftrightarrow$为命题连接词.

§3 命题与公式的形成规则

我们已经指出了什么是初级命题，并且已指出初级命题都是命题，即若 $S_1 \in S_2$ 或 $S_1 = S_2$ 是一初级命题，其中 S_1，S_2 是任意给定的集合． 由上节分析的命题连接词的特点，可知若 A、B 为两个命题，则 $\neg A$，$(A \to B)$，$(A \vee B)$，$(A \wedge B)$ 与 $(A \leftrightarrow B)$ 都是命题．

例如 令 A 为 $S \in S_1$，B 为 $S \in S_2$，这时我们有：

(1) “$\neg S \in S_1$” 表示 “$S \notin S_1$”，并且 “$\neg S \in S_1$” 称为 “$S \in S_1$” 的否定命题，或否定式，

(2) “$S \in S_1 \to S \in S_2$” 表示“若 $S \in S_1$，则 $S \in S_2$”，

(3) “$S \in S_1 \vee S \in S_2$” 表示 “$S \in S_1$ 或者 $S \in S_2$”，

(4) “$S \in S_1 \wedge S \in S_2$” 表示 “$S \in S_1$ 且 $S \in S_2$”，

(5) “$S \in S_1 \leftrightarrow S \in S_2$” 表示 “$S \in S_1$ 当且仅当 $S \in S_2$”，亦即“若 $S \in S_1$，则 $S \in S_2$，并且若 $S \in S_2$，则 $S \in S_1$”．

当然，上述命题 A 与 B 本身也可以是很复杂的命题．

除了上述列举的几种类型的命题外，是否还有别的类型的命题呢？

在我们定义 $S_1 \subset S_2$ 时（即定义 1.7）曾指出 $S_1 \subset S_2$ 就意味着：“对于任意的对象 a，若 $a \in S_1$，则 $a \in S_2$”，这就是，“对于任意的对象 a 使得 $(a \in S_1 \to a \in S_2)$”．这是一种类型的命题，上述几种类型都不能包括这一类型．外延公理的前提也是这种类型的命题．“对于任意的对象 a，若 $a \in S_1$，则 $a \in S_2$，并

且若 $a \in S_2$，则 $a \in S_1$"，这就是："对于任意的对象 a，使得 $(a \in S_1 \longleftrightarrow a \in S_2)$"．这种类型的命题上边还出现几处，希望读者找出它们来，并做些分析．

在定义真包含 $S_1 \subset_+ S_2$ 时（即定义 1.8），我们曾说，"有一个对象 a，$a \in S_2$ 且 $a \notin S_1$"．这里"有一个"就是"存在一个"．这句话是："存在一个对象 a，使得 $(a \in S_2 \wedge \neg a \in S_1)$"．这又是一种类型的命题．

为了精确地刻划这两种类型的命题，我们需要引进变元和量词的概念．

令 x, y, z 等为变元符号，用它们表示集合，或者说它们在集合的范围内取值．$x \in y$，$x = y$ 或者 $x \in S_1$，$S \in y$ 它们都是公式．是一个比命题更广泛的概念．

有两个量词，一是"$\forall$"，称为"全称量词"，"$\forall x$"指称"所有的 x"或"对于任意的集合 x"．另一个是"$\exists$"，称为"存在量词"，"$\exists x$"指称"存在 x"或"有 x"或"存在一个集合 x"等．

例 1 "$\exists x(x \in S_2 \wedge \neg x \in S_1)$"意指"存在着一个集合 S，使得 $S \in S_2$ 且 $S \notin S_1$ 成立"．

例 2 "$\forall x(x \in S_1 \to x \in S_2)$"意指"对于任意的集合 S，使得若 $S \in S_1$，则 $S \in S_2$ 成立"．

现在我们给出公式的形成规则如下：

定义 2.1 集合论公式的形成规则是：

(1) $t \in t_2$ 和 $t_1 = t_2$ 都是公式，其中 t_1 可以是一变元，也可以是一集合．同样 t_2 也可以是变元，也可以是集合．当

t_1（或 t_2）是一变元 x 时，这时我们称 x 是在 $t_1 \in t_2$（或 $t_1 = t_2$）中是自由出现的.

(2) 若 A, B 是公式，则 $\neg A$, $(A \to B)$, $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \leftrightarrow B)$ 都是公式，并且一变元若在 A 中是自由出现的，则它在 $\neg A$ 也是自由出现的. 若一变元在 A 中或在 B 中是自由出现的，则在 $(A \to B)$, $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$ 和 $(A \leftrightarrow B)$ 中都仍然是自由出现的.

(3) 若 $A(x)$ 是一公式，并且变元 x 在其中自由出现，这时 $\forall x A(x)$, $\exists x A(x)$ 都是公式，并且变元 x 在 $\forall x A(x)$ 和 $\exists x A(x)$ 中都是约束出现的，其它变元在 $A(x)$ 中是自由(或约束的)出现的，那么在 $\forall x A(x)$ 和 $\exists x A(x)$ 仍然是自由(或约束的)出现的.

(4) 公式都是经过(1)—(3)获得的.

例3 对于任意的集合 S，x 是一变元，这时由定义 2.1(1) $x \in S$ 是一公式，并且 x 在 $x \in S$ 中是自由出现的. 由定义 2.1(3)，$\exists x(x \in S)$ 和 $\forall x(x \in S)$ 都是公式，变元在它们中都是约束出现的，没有其它变元在它们中自由出现，也没有其它变元在它们中约束出现. 在这两个公式中，集合 S 有时也称做常量. 它是已知的，虽然它是可以任意给定的集合.

例4 由定义 2.1(1)，$x \in y$ 是一公式，$x \in S$ 也是一公式，其中 x, y 是变元，S 为任意给定的集合. 由定义 2.1(2)，$x \in y \wedge x \in S$ 是公式，x, y 是在其中自由出现的变元，且式中不含其它变元. 由定义 2.1 (3)，$\exists x\,(x \in y \wedge x \in S)$ 也是一公式，x 在其中是约束出现的，y 在其中是自由出现的，且式中

不含其他变元．再次使用定义 2.1(3)，可知

$$\forall y \exists x (x \in y \wedge x \in S)$$

是一公式，在这一公式中 x，y 都是约束出现的，而且不含其他变元．

定义 2.2 任一公式 A，如果其中没变元自由出现，我们就称 A 为一命题，也称 A 为一语句．

例 5 $S_1 \in S_2$ 是一命题，$S_1 = S_2$，$S_2 \in S_1$ 都是命题，其中 S_1，S_2 为任意给定的集合．

例 6 当 x，y 为变元时，$x \in y$ 不是一命题，因为 x，y 在其中自由出现；$\forall y(x \in y)$ 也不是一命题，因为 x 仍在其中自由出现，然而 $\exists x \forall y(x \in y)$ 就是一命题了，因为它是一公式，并且没有任意变元在其中自由出现．

由定义 2.2 可知，任一命题，如果其中出现变元的话，就一定是约束出现的．

例 7 由定义 2.1，可知 $\exists y \forall x(x \in y)$ 是一公式，并且 $x \in S$ 也是一公式，因此，我们可知 $\exists y \forall x(x \in y) \vee x \in S$ 是一公式．并且变元 x 在 $\exists y \forall x(x \in y)$ 是约束出现的．而在 $x \in S$ 是自由出现的．量词 $\forall x$ 的作用域(亦称辖域)为 $(x \in y)$，而 $x \in S$ 不在它的辖域之中，因此，变元 x 在 $\exists y \forall x(x \in y) \vee x \in S$ 是自由出现的（虽然它在其中一部分，即在 $\exists y \forall x(x \in y)$ 中是约束出现的）．因此整个公式 $\exists y \forall x(x \in y) \vee x \in S$ 还不是一个命题．

§4 命题的真值与命题连接词的真值表

在本书中，任一命题总是或者成立，或者不成立，两种情况必居其一，且仅居其一. 一命题成立时我们可以说它取真值，否则就说它取假值，也就是说一命题总是取真值或者取假值，既不能同时又真又假，也不能既不真，又不假. 对于一复杂命题的真假值(以后简称真值)按下面给出的格式规定:

(1) 对于初等命题 $S_1 \in S_2$，其中 S_1 与 S_2 为给定的集合. 这时，由集合 S_1 与 S_2，可知此命题取真值或取假值了. 例如，当 S_1 为$\varnothing$，S_2 为 $\{\varnothing\}$，这 $\varnothing \in \{\varnothing\}$ 当然取真值了. 类似地 $1 \in 2$，$1 \in \{1\}$，$1 \in 3$，$2 \in 4$ 等等都是取真值的命题. 然而当 S_1 为 $\{\varnothing\}$，S_2 为$\varnothing$时，显然 $\{\varnothing\} \in \varnothing$ 不成立，即取假值了.

(2) 已知命题 A 的真值，考察 $\neg A$ 的真值，显然 $\neg A$ 的真值与 A 的真值正好相反，即若 A 取真值，则 $\neg A$ 取假值，反之，若 A 取假值，则 $\neg A$ 取真值.

为了简便，今后我们用 0 表示假值，用 1 表示真值，这样，我们就有 A 与 $\neg A$ 的真假值的关系表，并称之为否定词$\neg$的

表 1 否定词的真值表

A	$\neg A$
0	1
1	0

表 2 析取词的真值表

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

真值表(见表 1).

(3) 已知命题A与B的真值,考察命题"$A \vee B$"的真值.这时,我们知道,当A,B之中至少有一个取真值时,就有"$A \vee B$"取真值.所以,可用真值表(见表2)说明.

(4) 已知命题A与B的真值,考察命题"$A \wedge B$"的真值.这时,我们知道,当A和B都取真值时,"$A \wedge B$"才取真值,否则都取假值.所以,我们有合取词的真值表(见表3).

表3 合取词的真值表

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表4 蕴涵词的真值表

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

(5) 已知命题A与B的真值,我们来考察蕴涵式"$A \to B$"的真值.它的真假值的情况用蕴涵词的真值表(见表4)概括为:当前件A取假值时,不管后件B取真值或假值,整个蕴涵式取真值.当前件A取真值,后件B取假值时,整个蕴涵式取假值,前后件都取真值时,整个蕴涵式取真值.

注1 对于初学的人来说,表4前两种情况可能有点费解,这里给些通俗的说明.在日常语言中,某人说:"如果今天上午下雨,则我请客".如果,"今天上午下雨"取0值,亦即今天上午没有下雨,他也没有请客,即"我请客"取假值.在这种情况下,按照通常的习惯,人们并不会指责此人不对,说他

讲的“如果今天上午下雨，则我请客”是假话．另一方面，就是虽然今天上午没有下雨，亦即“今天上午下雨”仍然取假值，但此人也请了客，即“我请客”取 1 值，这时，人们也没有理由指责他是不对的．因为他并没有说，今天上午不下雨，他就不请客．因此，此时 $(A \to B)$ 仍然取 1 值． 只有在“今天上午下雨了”，即前件 A 取 1 值，而此人又不请客，亦“我请客”取 0 值，人们才指责他说话不算话，亦即“如果今天上午下雨，则我请客”取 0 值．当然，今天上午下雨了，他也请客了，无疑他的话是真的了，即取 1 值了．

还应当说明的，上述这种对蕴涵词的解释称之为实质蕴涵．数学中常用的“如果…，则…”有时也说“若…，则…”，它们的含义都是与实质蕴涵的含义一致的．所以，蕴涵词的真值表对数学家来说是十分自然的．

(6) 已知命题 A 与 B 的真值，“$A \longleftrightarrow B$”的真值是按表 5 给出的：

表 5　双蕴涵词的真值表

A	B	$A \longleftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

双蕴涵词在数学的定理和证明中是常常用到的，是大家都熟悉的，就不多作解释了．

(7) 对于形式为 $\forall xA(x)$ 的命题，如果对于任意集合 S，我们已经知道了 $A(S)$ 的真假值，并且对于每一集合 S，$A(S)$ 都取 1 值，这时 $\forall xA(x)$ 亦取 1 值，否则 $\forall xA(x)$ 取假值.

应当注意，上述 $A(S)$ 是把 $A(x)$ 中 x 的每一个自由出现都替换为集合 S 所获得的结果.

(8) 对于形式为 $\exists xA(x)$ 的命题，如果对于任意集合 S，我们已经知道了 $A(S)$ 的真假值，并且总有一集合 S，使得 $A(S)$ 取 1 值，这时 $\exists xA(x)$ 求取 1 值，否则 $\exists xA(x)$ 取 0 值.

其次，依据上述八条分析，任给一命题 A，若 A 中有 $n+1$ 个量词出现，则由上述(7)与(8)两条，我们能够还原为只讨论出现 n 个量词的情形，反复进行，即可还原为不出现量词的命题. 对于不出现量词的命题来讲，由命题连接词的真值表，可以还原为只讨论初级命题的真假值的情形. 上述几条，有时可交错使用，以逐步还原为仅考察初级命题的真假值就够了，其真假值是在具体情况下由具体集合决定的.

注 2 我们已经指出，$S_1 \subset S_2$ 意指，"对于任意的集合 S，若 $S \in S_1$，则 $S \in S_2$". 这就是: $\forall x(x \in S_1 \rightarrow x \in S_2)$. 所以 $S_1 \subset S_2$ 是一含有量词的命题. 因此，在考察 $S_1 \subset S_2$ 的真假值时，要使用上述条件(7)与(5).

注 3 虽然 $S_1 = S_2$ 是一初级命题，但是，在考察它是否真命题时，总是这样进行的: "对于任意的集合 S，是否有: 若 $S \in S_1$，则 $S \in S_2$，并且若 $S \in S_2$，则 $S \in S_1$". 这就是考察命题: "$\forall x(x \in S_1 \longleftrightarrow x \in S_2)$" 是否取 1 值了. 这又需要还原到(6)与(7)两条. 在这个意义下，初级命题就只有形式为 $S_1 \in S_2$

的命题了，其它的命题或者是复合命题，或者必须还原到复合命题的情况下才能给出它的真值.

§5 永真命题

使用上节给出的命题连接词的真值表，我们可以验证不管已知命题 A 与 B 取什么值，有些命题是永远取真值的. 例如 $A\vee\neg A$, $A\rightarrow A$, $(A\vee B)\leftrightarrow(B\vee A)$ 等命题就是这样的.

表 6　三个永真命题

A	B	$\neg A$	$A\vee\neg A$	$A\rightarrow A$	$A\vee B$	$B\vee A$	$(A\vee B\leftrightarrow B\vee A)$
0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1

从表 6 上可以看出它们是永远取 1 值的，上述命题取真值仅与其中出现的连接词和它们的位置有关，而与 A 与 B 的真值无关. 这类命题就是本节所说的永真命题. 也就是说永真命题是由它们的形式决定的. 具体的集合论初级命题，如象 $\varnothing\in\{\varnothing\}$，虽然也取 1 值，但不属于本节中所说的永真命题.

永真命题在论证中经常出现，因而是很重要的. 比如，在定理 2.1(1) 的证明中，我们曾指出：若有："$a\in S_1$ 或者 $a\in$

S_2”成立，则有：“$a \in S_2$ 或者 $a \in S_1$”成立．这是为什么呢？就是因为由连接词 $\vee$ 与 $\longleftrightarrow$ 的性质，$(A \vee B) \longleftrightarrow (B \vee A)$ 是一个永真命题．又比如，在定理 2.2(3) 的证明中，我们曾指出：命题“$a \notin S_2$ 且 $a \notin S_3$”就意味着不能有“$a \in S_2$ 或者 $a \in S_3$”成立．这里的推理也使用了永真命题．下面较系统地讨论一些常用的永真命题．在本书中我们仅使用真值表方法来证明这些永真命题．这些永真命题就是通常说的逻辑定律．

上边我们已用真值表方法证明三个永真命题．为以后引用方便现编号列举如下．

l.1 对于任意的命题 A，都有 $(A \vee \neg A)$ 是永真的．

l.2 对于任意的命题 A，都有 $(A \to A)$ 是永真的．

l.3 对于任意的命题 A 和 B，都有

$$(A \vee B) \longleftrightarrow (B \vee A)$$

是永真的．

l.1 称为排中律，以后，读者将看到排中律是很有用的．l.2 称为重复律，在定理 1.2(1) 的证明中，我们说，“若 $a \in S_1$ 则 $a \in S_1$”就是这一定律．l.3 称为对于析取词的交换律，今后，为避免重复，在不加特别说明时我们总是用英文大写 A，B，C 加或不加下标表示任意的命题．

l.4 $(A \to (B \to A))$ 为永真命题．

现在表 7 给出了 l.4 的证明．

l.5 $(A \wedge (A \to B)) \to B$ 是永真命题．

证明参见表 8．

l.5 在逻辑史上是一条著名的定律，其应用也是极为广泛

表 7　$I.4$ 的真值表证明

A	B	$(B \to A)$	$(A \to (B \to A))$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

表 8　$I.5$ 的真值表证明

A	B	$(A \to B)$	$A \wedge (A \to B)$	$I.5$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

的. 它的下述形式有时也称为逻辑分离规则. 在定理 1.2(2) 的证明中，我们曾说过："S_1 与 S_2 满足外延公理的前提(这就是命题 A 成立)，所以由外延公理(就是设 $A \to B$ 成立)，我们有 $S_1 = S_2$(亦即命题 B)." 也就是分离规则的一个典型的应用.

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B \\ A\end{array}}{B}$$

其中 $A \to B$ 称为大前提，A 称为小前提，B 称为结论.它是说，若 $(A \to B)$ 真且 A 真，则 B 一定真.表 8 的末一行正是说明了这一点. 当大前提 $(A \to B)$ 真时，仍然可能有两种情

况，一种是B真（这时当然我们的结论成立）．一种是由于A假（这时不管B取什么值，$(A \to B)$都真），然而当A真时，只有B真时，$(A \to B)$才能取真值．这就是说，两个前提取真值就确保了结论的正确性．

l.6 $((A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C)))$ 是永真命题．

有时也称 l.6 为蕴涵词的传递律，它刻划了蕴涵词的一条重要的特性，下边我们使用真值表方法证明我们的结论．

表 9　l.6 的真值表证明

A B C	$A \to B$	$B \to C$	$A \to (B \to C)$	$A \to C$	(*)	l.6
0 0 0	1	1	1	1	1	1
0 0 1	1	1	1	1	1	1
0 1 0	1	0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	0	0	1
1 0 1	0	1	1	1	1	1
1 1 0	1	0	0	0	1	1
1 1 1	1	1	1	1	1	1

其中(*)表示$((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$．

由 l.1—6 的真值表证明，我们可以看出，在我们证明永真命题的过程中总是这样的，首先是把其中出现的用字母直接表示的命题（如 l.6 中的命题 A、B、C）取 0，1 值的各种可能列为表的前列，其次由命题的结构，依据命题的形成规则逐步把它分解成一系列较为简单的命题，把它们列在表头上，比如表 9 中的 $(A \to B)$，$(B \to C)$，$(A \to C)$，$((A \to (B \to$

$C))\to(A\to C))$ 等．然后使用命题连接词的真值表逐步求出所列举的各命题的真值表．最后，依据这些命题的真值按照命题连接词的真值表求出欲证命题的真值．如果它总取 1 值，则它为一永真命题．有许多命题并不是永真的，当然不能用作逻辑定律．

下边列举的逻辑定律 $l.7$—13 我们希望读者给出它们的真值表证明．

l.7 $((A_1\vee A_2)\to A_3)\leftrightarrow((A_1\to A_3)\wedge(A_2\to A_3))$ 为永真命题．

l.8 $(A\to(B\to(A\wedge B)))$ 是永真命题．

l.9 (1) $((A\wedge B)\to A)$，

(2) $((A\wedge B)\to B)$，

都是永真命题．

l.10 (1) $(A\to(A\vee B))$，

(1) $(B\to(A\vee B))$，

都是永真命题．

l.11 $((A\to C)\to((B\to C)\to((A\vee B)\to C)))$ 是永真命题．

l.12 $((A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A))$ 是永真命题．

l.13 $(\neg\neg A\to A)$ 是永真命题．

习　　题

1. 使用真值表方法证明 $l.8$．
2. 使用真值表方法证明 $l.9$．
3. 使用真值表方法证明 $l.10$．

4. 使用真值表方法证明 $l.11$。

5. 使用真值表方法证明 $l.12$。

6. 使用真值表方法证明 $l.13$。

7. 证明 $((A\wedge B)\leftrightarrow(B\wedge A))$ 为永真命题，并分析它在定理 2.1(2) 的证明中的应用。

§6 反证法与归谬律

反证法和归谬律是数学证明中的重要方法. 它们对许多重要的数学定理来说，是不可缺少的. 现在我们就定理 1.1 和定理 2.2(1) 的证明来说明反证法与归谬律的概念、应用以及它与 $l.12$、$l.13$ 的关系.

首先考察定理 1.1 的证明，在那里集合 S 是已知的，目的是证明：$\varnothing\subset S$. 假定 $\varnothing\not\subset S$ 成立，这就是"存在某一集合 S_1 使得 $S_1\in\varnothing$ 且 $S_1\notin S$"，这与 $\varnothing$ 的定义矛盾(因为由 $\varnothing$ 的定义，我们有，对于任一集合 S_1，都有 $S_1\notin\varnothing$). 如果令 B 为:

"存在某一集合 S_1 使得 $S_1\in\varnothing$"， (2.1)

那么 $\neg B$ 就意味着

"对于任一集合 S_1，都有 $S_1\notin\varnothing$". (2.2)

若令 A 为"$\varnothing\subset S$"，则 $\neg A$ 为"$\neg(\varnothing\subset S)$". 上述过程是说，若 $\neg A$ 真，则 B 真，并且若 $\neg A$ 真，则 $\neg B$ 真，由 $\rightarrow$ 的真值表的定义，可得 $(\neg A\rightarrow B)$ 取 1 值，$(\neg A\rightarrow\neg B)$ 也取 1 值. 另外我们把这里的 $\neg A$ 替换 $l.12$ 中出现的 A，即得到:

$$(\neg A\rightarrow B)\rightarrow((\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg\neg A)$$

为永真命题（读者可用真值表法直接验证这一命题是永真

的). 这样，我们两次使用分离规则，就得到了 $\neg\neg A$ 真，亦即 $\neg\neg(\varnothing\subset S)$真. 然后由 $l.13$，$\neg\neg A\rightarrow A$ 作为大前提，并使用分离规则，即得到 A，亦即 $\varnothing\subset S$ 真.

不难看出，上述证明过程是: 假定 $\neg A$ 成立，由 $\neg A$ 推得 B 且 $\neg B$，由此，使用 $l.12$ 与 $l.13$ 推得 A，而 A 正是我们需要的结论，这就是反证法. 总之，反证法就是这样一种方法: “假定 $\neg A$，由 $\neg A$ 推得 B 且 $\neg B$，说明假定 $\neg A$ 是不对的，从而有 A 成立”.

其次，我们来分析定理 2.2(1) 的证明，在那里，集合 S_1 是已知的，对于任意的对象 a 来说，假定 $a\in S_1\dot{-}S_1$ (这可以作为命题 A)，由 A 及定义 1.12 (它的正确性是由相对补公理确保的) 我们就推得 $a\in S_1$ 且 $a\notin S_1$ 同时成立，将 $a\in S_1$ 作为命题 B，这样我们就有 B 与 $\neg B$ 同时成立. 故 $a\notin S_1\dot{-}S_1$ 成立，即 $\neg A$ 成立.

上述过程中，首先证明 $A\rightarrow B$ 与 $A\rightarrow\neg B$ 均取 1 值. 最后是依据 $l.12$，两次使用分离规则，就得到了 $\neg A$ (注意，这里没有使用 $l.13$). 这种证明方法就是归谬律. 换句话说，归谬律就是:

假定 A 成立，由 A 推得 B 与 $\neg B$，说明假定 A 是不对的，从而有 $\neg A$ 成立.

反证法与归谬律的不同之处在于前者除了使用 $l.12$ 还需依据 $l.13$ 才能获得，而后者仅须使用 $l.12$ 即可获得.

注 4 定理 1.1 也可以不用反证法证明，而用下述逻辑定律即可获得.

l.14 $(A \to (\neg A \to B))$ 是永真命题.

l.14 读者自己用真值方法给出证明. 从逻辑的推理角度来看，它比 l.12 与 l.13 要弱一些，而且是构造论学者(他们不愿承认“排中律”作为思维的基本规律，不赞成一般地承认反证法)能够接受的定律. 本书不打算详细讨论它们的区别. 我们仅指出使用 l.14 可以获得定理 1.1 的一个证明.

对于任意的集合 S_1，假定有 $S_1 \in \varnothing$，然而另一方面，由空集合 $\varnothing$ 的定义，又有 $S_1 \notin \varnothing$. 我们令命题 A 为 $S_1 \in \varnothing$，$\neg A$ 即为 $S_1 \notin \varnothing$，并取命题 B 为 $S_1 \in S$. 这时 l.14 即为:

$$S_1 \in \varnothing \to (S_1 \notin \varnothing \to S_1 \in S).$$

两次使用分离规则，即推得 $S_1 \in S$，上述过程表明，“对于任意的集合 S_1，若 $S_1 \in \varnothing$，则 $S_1 \in S$”. 据定义1.8，即得 $\varnothing \subset S$，这就是定理 1.1 的另一个证明(不使用反证法的证明).

虽然定理 1.1 既可以用反证法来证明，也可以用 l.14 来证明. 但是并非一切定理都是这样，有些定理不使用反证法是不能给出它的证明的.

注 5 令(2.1)式为 B，它的否定式，即 $\neg B$ 为“不存在集合 S_1，使得 $S_1 \in \varnothing$”. 这就意味着(2.2)式成立，即“对于任一集合 S_1，都有 $S_1 \notin \varnothing$”. 这种论证方式关系到谓词演算基本推理规则. 对此有兴趣的读者可以分析一些这种类型的问题，并可参阅文献[1]、[2]、[5].

习　　题

1. 使用真值表方法证明 l.14.

§7 蕴涵推演法与双蕴涵推演法

本书采用数学研究中的通常方法，把公理、逻辑定律(永真命题)和已证明的定理作为工具，也就是说，我们证明新定理时，总可以使用已有的公理、定理、给定前提和逻辑定律，由此逐步建立新的概念和定理，在证明新定理时，有些方法更为简洁、显明，更便于读者掌握. 本节要讲的蕴涵推演法与双蕴涵推演法就是这类证明方法. 为了考察这二个方法，让我们继续分析有关定理的证明过程.

现在，我们再次改写定理 1.1 的证明过程，对于任意的集合 S_1，我们有：

(1) $(S_1 \in \varnothing) \to (S_1 \in \varnothing) \wedge (S_1 \notin \varnothing)$,

(2) $\to ((S_1 \in \varnothing) \wedge (S_1 \notin \varnothing)) \wedge ((S_1 \in \varnothing) \to ((S_1 \notin \varnothing) \to (S_1 \in S)))$,

(3) $\to (S_1 \notin \varnothing) \wedge ((S_1 \in \varnothing) \wedge ((S_1 \in \varnothing) \to ((S_1 \notin \varnothing) \to (S_1 \in S))))$,

(4) $\to (S_1 \notin \varnothing) \wedge ((S_1 \notin \varnothing) \to (S_1 \in S))$,

(5) $\to (S_1 \in S)$.

由蕴涵的传递律，有 $S_1 \in \varnothing \to S_1 \in S$. 上述过程对一切 S_1 都成立，所以有 $\varnothing \subset S$ 成立.

上述步骤中，(1)是依据第一章空集合公理的推论和 $l.8$；(2)是依据 $l.14$ 与 $l.8$；(3) 依据习题 7；(4) 与 (5) 都是依据 $l.5$，这些根据也可以类似于初等几何的方法直接写在过程每

一步骤的后边，并用括号把这理由括起来，以显示它的严谨与清晰.

现在，我们使用上述蕴涵推演法证明下述有关集合的定理.

定理 2.3 对于任意的集合 S_1, S_2 与 S_3，有:

(1) $S_1 \cap S_2 \subset S_1$,

(2) $S_3 \subset S_1 \wedge S_3 \subset S_2 \to S_3 \subset S_1 \cap S_2$,

(3) $(S_1 \dot{-} S_2) \dot{-} S_3 = S_1 \dot{-} (S_2 \cup S_3)$.

证明 先证(1)，对于任意的集合 S，我们有:

$$S \in S_1 \cap S_2 \to S \in S_1 \wedge S \in S_2 \quad \text{(由定义 1.9)}$$
$$\to S \in S_1, \quad \text{(由 } l.9\ (1)\text{)}$$

由蕴涵词的传递律，我们有

$$S \in S_1 \cap S_2 \to S \in S_1,$$

并且由于 S 的任意性和定义 1.7，我们就获得了欲证结果，即 $S_1 \cap S_2 \subset S_1$.

再证(2)，此时，前提为 $S_3 \subset S_1 \wedge S_3 \subset S_2$，欲证 $S_3 \subset S_1 \cap S_2$，即对于任意的集合，已知有:

$$(S \in S_3 \to S \in S_1 (\wedge) S \in S_3 \to S \in S_2), \qquad (2.3)$$

欲证: $S \in S_3 \to S \in S_1 \cap S_2$.

由上述分析，有:

$$S \in S_3 \to ((S \in S_1) \wedge (S \in S_2)) \quad \text{(由(2.3)及 } l.5\text{)}$$
$$\to S \in S_1 \cap S_2. \quad \text{(由定义1.9)}$$

$\therefore \quad S_3 \subset S_1 \cap S_2$

故: $S_3 \subset S_1 \wedge S_3 \subset S_2 \to S_3 \subset S_1 \cap S_2$.

在上述证明中，定理 2.3(1) 是直接使用蕴涵推演法的。而定理 2.3(2) 的证明要做一点分析，然后使用此法即可获得．实际上读者不难看出我们两次使用了蕴涵推演法，第二次是嵌套在第一次之中．这种方法也可称之为嵌套蕴涵推演法．

为分析双蕴涵推演法，我们给出定理 2.2(2) 与 (3) 的另一证明．先证(2)，对于任意的集合 S，有：

(1) $S \in S_1 \dot{-} (S_1 \dot{-} S_2) \longleftrightarrow S \in S_1 \wedge S \notin (S_1 \dot{-} S_2)$，

(由定义 1.11)

(2) $\longleftrightarrow S \in S_1 \wedge \neg(S \in S_1 \dot{-} S_2)$，

(3) $\longleftrightarrow S \in S_1 \wedge \neg(S \in S_1 \wedge S \notin S_2)$，　　(定义 1.11)

(4) $\longleftrightarrow S \in S_1 \wedge (S \notin S_1 \vee S \in S_2)$，

(5) $\longleftrightarrow (S \in S_1 \wedge S \notin S_1) \vee (S \in S_1 \wedge S \in S_2)$，

(6) $\longleftrightarrow S \in S_1 \wedge S \in S_2$，

(7) $\longleftrightarrow S \in S_2$.

上述过程，(3)与(4)双蕴涵用到了下述两条逻辑定律：

l.15　$\neg(A \wedge B) \longleftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ 为永真命题．

l.16　$\neg\neg A \longleftrightarrow A$ 为永真命题．

(4)与(5)双蕴涵用到了下述逻辑定律：

l.17　$(A \wedge (B \vee C)) \longleftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ 为永真命题．

(5)与(6)双蕴涵用到了下述逻辑定律：

l.18　$((A \wedge \neg A) \vee B) \longleftrightarrow B$ 为永真命题．

(6)蕴涵(7)是依据 l.9，而(7)蕴涵 (6) 是依据前提有

$S_2 \subset S_1$.

由(1)至(7),使用下述

l.19 $((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)) \rightarrow (A \leftrightarrow C)$.

就有

$$S \in S_1 \dot{-} (S_1 \dot{-} S_2) \leftrightarrow S \in S_2. \quad (2.4)$$

由于 S 为任意集合,(2.4)式均成立,故满足外延公理的前提,依据外延公理,我们就有:

$$S_1 \dot{-} (S_1 \dot{-} S_2) = S_2.$$

这就完成了(2)的证明. 当读者逐步熟悉逻辑定律时,上述证明是很简洁、严谨的.

l.20 $((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$ 是永真的.

上述 l.15—20,读者不难使用真值表方法给出它们的证明.

再证(3),对于任意的集合 S,我们有:

$$\begin{aligned} S \in (S_1 \dot{-} S_2) \dot{-} S_3 &\leftrightarrow S \in (S_1 \dot{-} S_2) \wedge S \notin S_3 \\ &\leftrightarrow (S \in S_1 \wedge S \notin S_2) \wedge S \notin S_3 \\ &\leftrightarrow (S \in S_1) \wedge (S \notin S_2 \wedge S \notin S_3) \quad (\text{由 } l.20) \\ &\leftrightarrow S \in S_1 \wedge \neg(S \in S_2 \vee S \in S_3) \quad (\text{由 } l.15) \\ &\leftrightarrow S \in S_1 \wedge \neg(S \in S_2 \cup S_3) \\ &\leftrightarrow S \in S_1 \dot{-} (S_2 \cup S_3). \end{aligned}$$

由于 S 为任意集合,由外延公理,我们有:

$$(S_1 \dot{-} S_2) \dot{-} S_3 = S_1 \dot{-} (S_2 \cup S_3).$$

通过上述例子我们已经给出了蕴涵推演法与双蕴涵推演法的说明. 希望读者逐步掌握这些方法,在学习中学会使用

这些方法.

注6 对于量词，我们将在第三章给出说明，这样，外延公理的陈述也就更严格了.这就是：对于任意的二集合 S_1 与 S_2，外延公理是说

$$\forall x(x \in S_1 \longleftrightarrow x \in S_2) \to S_1 = S_2.$$

上述命题中，$\forall x(x \in S \longleftrightarrow x \in S_2)$ 为前提，而 $S_1 = S_2$ 为结论.

习　　题

1. 证明 l.15.
2. 证明 l.16.
3. 证明 l.17.
4. 证明 l.18.
5. 证明 l.19.
6. 证明 l.20.

第三章　集合的初等运算

在第一章中我们已经引进了集合的一些初等运算，及它们的某些性质．本章将讨论初等运算(并、交、相对补)的代数性质，它们的某些性质和中学课程中关于实数的初等代数的性质是类似的，某些性质又是不同的；然后还要从这些性质出发引进一新的运算——对称差，并讨论它的性质．

§1　集 合 代 数

本节主要讨论第一章定义的并，交，相对补的代数性质．为了方便，我们用 x，y，z 表示任意的集合，并且重新写出下面的基本公式：

$$x\cup y=\{z|z\in x\vee z\in y\},$$

$$x\cap y=\{z|z\in x\wedge z\in y\},$$

$$x\dot{-}y=\{z|z\in x\wedge z\notin y\}.$$

我们给出 $x\cup y$ 时已用到并公理． $x\cap y$ 和 $x\dot{-}y$ 两者都是集合 x 的子集合．

例如，假设人们研究某一固定的集合． 令 S 是取定的集合，又假定 $y\subset S$，那么相对补 $S\dot{-}y$ 由不在 y 中的那些 S 的元组成．

并运算 $\cup$，交运算 $\cap$，相对补运算 $\dot{-}$ 连同包含关系 $\subset$ 的研究，称为集合代数．在某种程度上集合代数服从实数代数的经验定律，但含意不同．

下述对任何集合都成立的恒等式是集合代数的一些基本定律．

交换律

$$x \cup y = y \cup x, \tag{3.1}$$

$$x \cap y = y \cap x. \tag{3.2}$$

结合律

$$x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z, \tag{3.3}$$

$$x \cup (y \cap z) = (x \cap y) \cap z. \tag{3.4}$$

分配律

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z), \tag{3.5}$$

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z). \tag{3.6}$$

达·摩尔根（De Morgan）定律

$$z \dot{-} (x \cup y) = (z \dot{-} x) \cap (z \dot{-} y), \tag{3.7}$$

$$z \dot{-} (x \cap y) = (z \dot{-} x) \cup (z \dot{-} y). \tag{3.8}$$

有关 $\varnothing$ 的恒等式

$$x \cup \varnothing = x \text{ 和 } x \cap \varnothing = \varnothing, \tag{3.9}$$

$$x \cap (z \dot{-} x) = \varnothing. \tag{3.10}$$

通常，人们考虑的所有集合是某个大集合或“空间” S 的子集合．那么，我们可以把 $S \dot{-} x$ 简单缩写成 $\dot{-}x$，把 S 理解成固定的．因此缩写为

$$\dot{-}(x \cup y) = \dot{-}x \cap \dot{-}y, \tag{3.11}$$

$$\dot{-}(x\cap y)=\dot{-}x\cup\dot{-}y. \tag{3.12}$$

更进一步得到(仍在 $x\subset S$ 的假定下)

$$x\cup S=S \quad 和 \quad x\cap S=x, \tag{3.13}$$

$$x\cup\dot{-}x=S \quad 和 \quad x\cap\dot{-}x=\varnothing. \tag{3.14}$$

现在,我们来讲讲怎样证明这些定律的. 以分配律(3.5)作为例子.

验证此恒等式的一个方法是作图(图1)法,这种方法的优点是比较直观. 使用这一方法我们的欲证结果都是一目了然的.

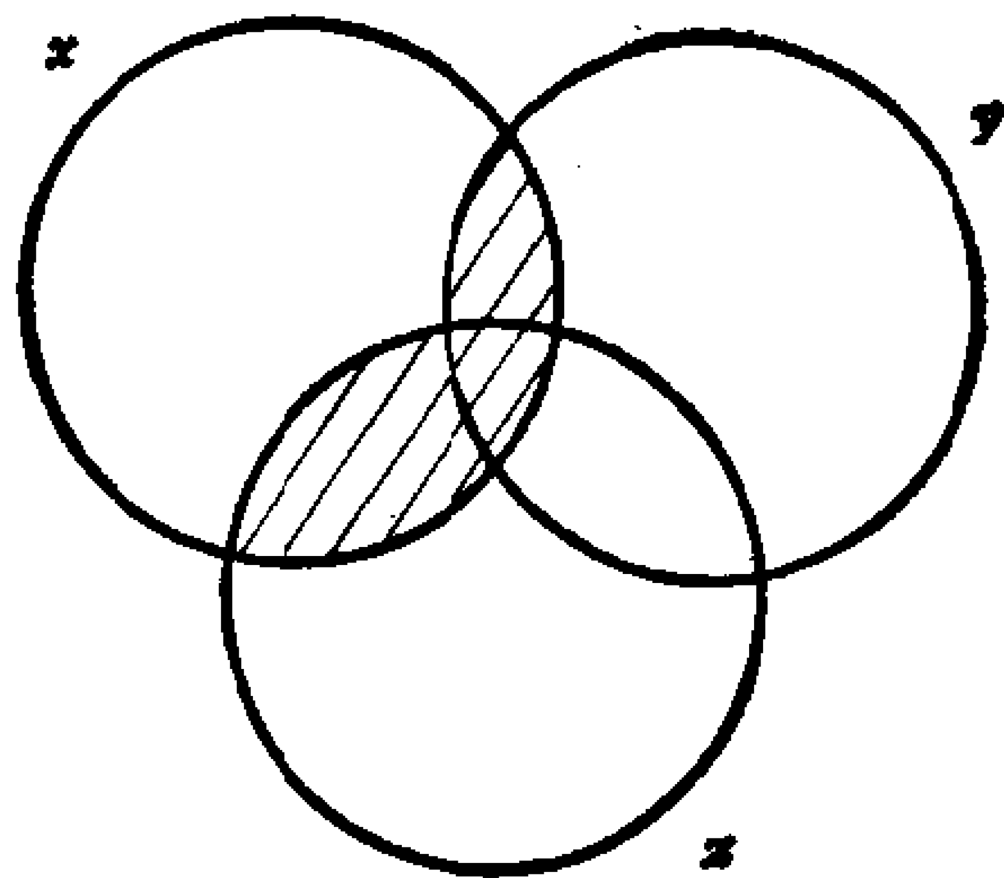


图1 分配律(3.5)的示意图

代表 $x\cap(y\cup z)$ 的区域和代表 $(x\cap y)\cup(x\cap z)$ 的区域画上线条之后,人们发现这两个区域是相同的.

上述依赖图形的证明,实际上是否可靠呢？让我们不用图画法重新把它证明一遍. 为了证明所要求的等式,由外延性,只要考虑任意的集合 t,并且证明 t 属于 $x\cap(y\cup z)$ 当且仅当 t 属于 $(x\cap y)\cup(x\cap z)$ 就足够了. 我们可以列举所有八种可能:

$$t\in x \quad t\in y \quad t\in z, \tag{3.15}$$
$$t\in x \quad t\in y \quad t\notin z, \tag{3.16}$$
$$t\in x \quad t\notin y \quad t\in z, \tag{3.17}$$
$$t\in x \quad t\notin y \quad t\notin z, \tag{3.18}$$
$$t\notin x \quad t\in y \quad t\in z, \tag{3.19}$$
$$t\notin x \quad t\in y \quad t\notin z, \tag{3.20}$$
$$t\notin x \quad t\notin y \quad t\in z, \tag{3.21}$$
$$t\notin x \quad t\notin y \quad t\notin z. \tag{3.22}$$

(这些情况与图 1 的八种区域相对应)那么，我们可以核实八种情况的每一种，都有

$t\in x\cap(y\cup z)$ 当且仅当

$$t\in(x\cap y)\cup(x\cap z).$$

例如，在(3.19)中，我们求得

$$t\notin x\cap(y\cup z) \text{ 和 } t\notin(x\cap y)\cup(x\cap z).$$

(这种情况代表图 1 的什么区域?) 当作完另外七种情况的证明时，此等式的证明就完成了.

我们也可以把上述证明过程转换为真值表方法. 也就是说当 $t\in x$ 时，我们用 1 表示，类似地当 $t\in y$，$t\in z$ 时，都用 1 表示，而 $t\notin x$ 时，我们用 0 表示，类似地当 $t\notin y$，$t\notin z$ 时，都用 0 表示. 并且，按并与交的定义，$t\in x\cap(y\cup z)$ 就是:

$$t\in x\wedge(t\in y\vee t\in z), \tag{$*_1$}$$

而 $t\in(x\cap y)\cup(x\cap z)$ 就是:

$$(t\in x\wedge t\in y)\vee(t\in x\wedge t\in z). \tag{$*_2$}$$

这样，我们的真值表就是

表 1 (3.5) 式的真值表证明

$t\in x$	$t\in y$	$t\in z$	$t\in y\vee t\in z$	$t\in x\wedge t\in y$	$t\in x\wedge t\in z$	$(*_1)$,	$(*_2)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

由表 1 可知，$(*_1)$ 与 $(*_2)$ 的真值是相同的，即：它们所表示的命题是双蕴涵的．由 t 的任意性，由外延公理可得 (3.5) 成立．

使用逻辑定律 $l.17$，我们还可用双蕴涵推演法给出 (3.5) 的证明

$$
\begin{aligned}
t\in x\cap(y\cup z) &\longleftrightarrow t\in x\wedge t\in(y\cup z)\\
&\longleftrightarrow t\in x\wedge(t\in y\vee t\in z)\\
&\longleftrightarrow (t\in x\wedge t\in y)\vee(t\in x\wedge t\in z)\\
&\longleftrightarrow t\in x\cap y\vee t\in x\cap z\\
&\longleftrightarrow t\in(x\cap y)\cup(x\cap z).
\end{aligned}
$$

同样，使用外延公理可得(3.5)成立．

上述我们已给出了(3.5)的四种证明：图形法(亦称文氏图法)、逐一验证法、真值表法和双蕴涵推演法．图形法直观显明，然而不够严谨，逐一验证法较为烦琐，真值表法亦然，双蕴涵推演法显然不够直观，然而它具有严谨和简洁的优点．

现在，再以达·摩尔根律为例，证明(3.8)式成立。

首先看图2，很显然等式左边代表的图形是在 z 中划去 x 与 y 的公共部分，而等式右边 $z\dot{-}x$ 与 $z\dot{-}y$ 之并集，正好也是在 z 中划去 x 与 y 之交集合。

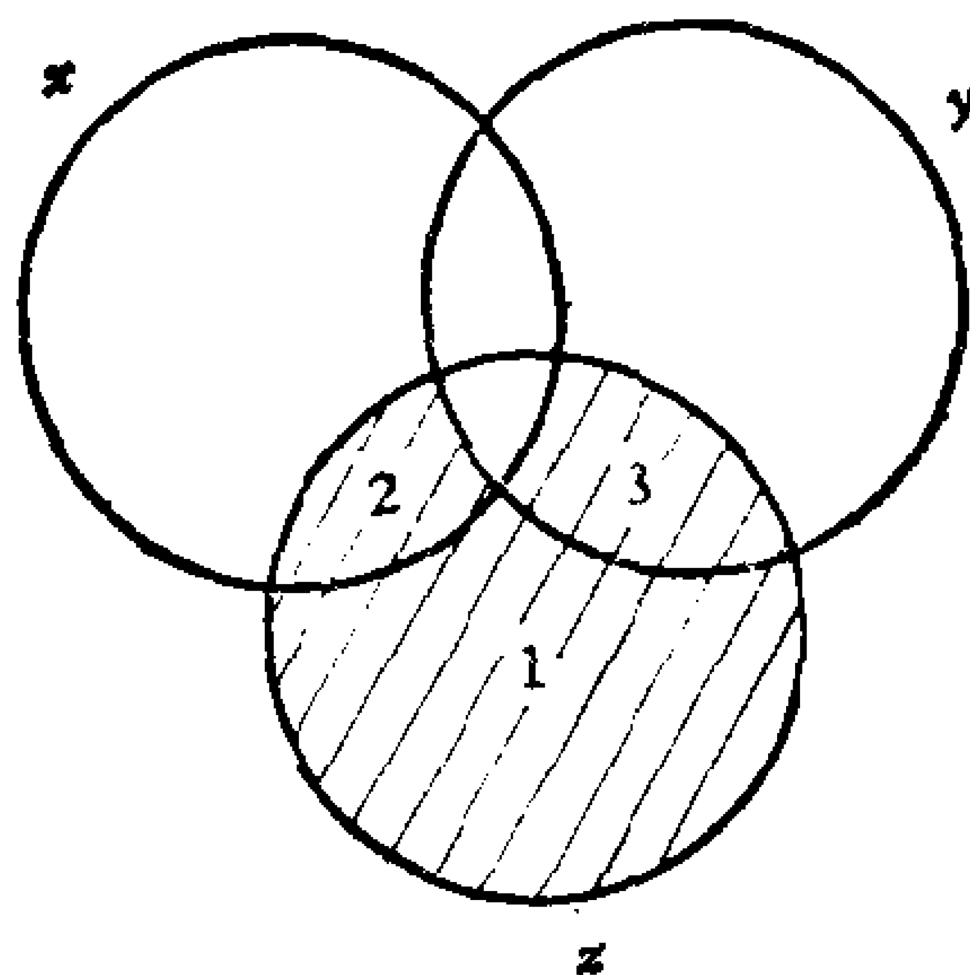


图2　达摩尔根律(3.8)的示意图

我们再用上例中的第二种方法(即逐一验证法)把它证一遍。为了证明欲证的等式，由外延公理，只须证对任意的集合 t 都有

$$t\in z\dot{-}(x\cap y)\longleftrightarrow t\in(z\dot{-}x)\cup(z\dot{-}y). \quad (3.23)$$

让我们重新列举上述证明中的八种情况。首先，$t\notin z$ 出现的那四种情况，即(3.16)，(3.18)，(3.20)，(3.22)不必细究，因为这时无疑公式(3.23)两边都不成立，同样，对于满足(3.15)的 t，公式(3.23)两边也都不成立。而其余的三种情况，公式(3.23)两边均成立。并且(3.17)对于图2中的部分2，(3.19)对应于图2中的部分3，而(3.21)对应于图2中的部分1的情形。

这种证明方法可应用到迄今所列举的所有等式。事实上，对于这一类的任何等式或包含式来说，它们都有效。如果等式包括 n 个字母，那么将有 2^n 种情况。例如，在分配律中有三个字母、八种情况。读者还可使用双蕴涵推演法证明(3.8)式。但是，对于下面所列举的某些事实来说，要求的机械证明方法较少。

(3.9) 可以从集合 $\varnothing$ 与并 $\cup$、交 $\cap$ 的定义直接得到，这表明空集合 $\varnothing$ 在集合代数中的作用有点象算术中数零的作用。没有 $\varnothing$ 我们就无法形成关于并、交和相对补的集合代数，但是还应当注意到它们的不同. 在代数中，当 $a \neq 0$ 和 $b \neq 0$ 时，它们的积当然不等于 0，然而，在集合代数中则不然，例如令

$$a = \{1\} = \{\{\varnothing\}\},$$

$$b = \{2\} = \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\},$$

这样，a，b 都是单元集合，它们的元素分别是 1 和 2，即$\{\varnothing\}$和$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，这是两个不同的元素，即 a 与 b 无公共元，所以

$$a \cap b = \varnothing.$$

对于任意的集合 x，y，我们已经指出，如果 $x \cap y = \varnothing$，我们就称 x，y 是不交的.

关于空集合 $\varnothing$ 和相对补还有二条应当特别注意的是：对于任意集 x，我们有：

$$x \dot{-} \varnothing = x, \tag{3.24}$$

$$\varnothing \dot{-} x = \varnothing. \tag{3.25}$$

当然，由定义 1.1 和 1.12 这一结论是很显然的，(3.24) 类似于初等代数中的运算律，而 (3.25) 则与初等代数中运算性质不同.

习　　题

1. 使用双蕴涵推演法证明 (3.8).
2. 使用双蕴涵推演法证明 (3.3).
3. 证明：(3.4).
4. 证明：(3.6).

5.证明：(3.7).

6.证明：(3.9).

7.证明：(3.10).

8.证明：对于任意的集合 x，y，下述两个关系是等价的：

(1) $x \dot{-} y = \varnothing$，

(2) $x \subset y$.

9.证明：对于任意的集合 x，y，下述两个式子是等价的.

(1) $x \dot{-} y = y \dot{-} x$，

(2) $x = y$.

10.证明：对于任意的集合 x，y，z，都有

$$z \cap (x \dot{-} y) = (z \cap x) \dot{-} (z \cap y).$$

§2 集合代数的几个定律

在上一节中，我们讨论了集合代数的一些重要的定律，其中多数与初等代数的定律相类似，本节使用蕴涵推演法和双蕴涵推演法着重讨论关于相对补和包含关系的一些特殊性质.

(1) 对于任意集合 x，y，我们有：

$$x \cup (y \dot{-} x) = x \cup y. \tag{3.26}$$

证明 对于任意的集合 z，我们有：

$$\begin{aligned} z \in x \cup (y \dot{-} x) &\longleftrightarrow z \in x \vee z \in (y \dot{-} x) \\ &\longleftrightarrow z \in x \vee (z \in y \wedge z \notin x) \\ &\longleftrightarrow (z \in x \vee z \in y) \wedge (z \in x \vee z \notin x) \\ &\longleftrightarrow z \in x \vee z \in y \\ &\longleftrightarrow z \in (x \cup y). \end{aligned}$$

由外延公理，即得欲证结果。

在上述推演过程中，我们使用了命题逻辑的下述定律。

l.21 $A\vee(B\wedge C)\leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$.

l.22 $A\wedge(B\vee\neg B)\leftrightarrow A$.

l.21 叫做析取词 $\vee$ 对于合取词 $\wedge$ 的分配律，其中 A, B, C 表示任意的命题。这在直观思维过程中也是很自然的；l.22 中使用了第二章已给出的排中律：

$$A\vee\neg A. \tag{3.27}$$

(2) 对于任意的集合 x, y, 有：

$$x\dot{-}y=x\dot{-}(x\cap y). \tag{3.28}$$

证明 设 z 为任一集合，有

$$\begin{aligned}z\in x\dot{-}y&\leftrightarrow z\in x\wedge z\notin y\\&\leftrightarrow(z\in x\wedge z\notin y)\vee(z\in x\wedge z\notin x)\\&\leftrightarrow(z\in x)\wedge(z\notin y\vee z\notin x)\\&\leftrightarrow(z\in x)\wedge\neg(z\in y\wedge z\in x)\\&\leftrightarrow(z\in x)\wedge\neg(z\in x\cap y)\\&\leftrightarrow z\in x\dot{-}(x\cap y).\end{aligned}$$

由外延公理，即得欲证结果。

在上述证明的过程中，使用了下述三条逻辑规律

$$A\longleftrightarrow A\vee(B\wedge\neg B), \tag{3.29}$$

$$\neg A\vee\neg B\longleftrightarrow\neg(A\wedge B), \tag{3.30}$$

$$A\wedge(B\vee C)\longleftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C). \tag{3.31}$$

在 (3.29) 中使用的 $B\wedge\neg B$ 为假命题，这就是古典逻辑中的矛盾律，(3.30)是自然的，而 (3.31) 叫做合取词 $\wedge$ 对于析

取词∨的分配律．显然，(3.29)是 $l.18$ 的直接推论，而(3.30)是 $l.15$，(3.31)是 $l.17$．由此可见，上述这样一些基本的思维规律，在我们日常生活中，在学习和讨论问题的过程中，总是经常出现而又需要注意思考的，它们都是很有意义的规律．

(3) 对于任意的集合 x, y, z, 我们有

$$x\cap(y \dot{-} z)=(x\cap y)\dot{-} z. \tag{3.32}$$

证明 对于任意的集合 t, 我们有

$$\begin{aligned} t\in x\cap(y\dot{-} z) &\longleftrightarrow t\in x\wedge t\in y\wedge t\notin z \\ &\longleftrightarrow t\in x\cap y\wedge t\notin z \\ &\longleftrightarrow t\in(x\cap y)\dot{-} z. \end{aligned}$$

由外延公理，我们的结论是显然的．

这里所使用的逻辑定律都是读者所熟知的，我们就不必逐一注明理由了．

(4) 对于任意集合 x, y, u, 关于包含关系我们有下述单调性质，并且它们说明了集合代数中的包含关系和初等代数中的小于等于关系之间的类似之处．

$$x\subset y\rightarrow x\cup z\subset y\cup z, \tag{3.33}$$

$$x\subset y\rightarrow x\cap z\subset y\cap z, \tag{3.34}$$

$$(x\subset y)\wedge(z\subset u)\rightarrow(x\cup z)\subset(x\cup u), \tag{3.35}$$

$$(x\subset y)\wedge(z\subset u)\rightarrow(x\cap z)\subset(y\cap u), \tag{3.36}$$

$$(x\subset y)\wedge(z\subset u)\rightarrow(x\dot{-} u)\subset(y\dot{-} z), \tag{3.37}$$

$$(z\subset u)\rightarrow(x\dot{-}u)\subset(x\dot{-}z). \tag{3.38}$$

实际上(3.38)是(3.37)的一个特例，确切地说，后两个式子应该叫反单调性质．

证明 先证(3.33),设 $x\subset y$, 且 t 为任一集合,这样,

$$\begin{aligned} t\in x\cup z &\to t\in x\vee t\in z \\ &\to t\in y\vee t\in z \\ &\to t\in y\cup z. \end{aligned}$$

所以,(3.33)成立.(3.34)与(3.33)相类似,只须把$\cup$换成$\cap$,把$\vee$换成$\wedge$即得欲证结果. 现在,我们来证(3.35).

我们首先假定 $x\subset y$ 与 $z\subset u$ 均成立,并设 t 为任一集合,则有

$$\begin{aligned} t\in x\cup z &\to t\in x\vee t\in z\to t\in y\vee t\in z\to t\in y\vee t\in u \\ &\to t\in y\cup u. \end{aligned}$$

所以(3.35)成立. 类似地有(3.36)成立. 现在来证(3.37),首先设 $x\subset y$ 且 $z\subset u$, 再设 t 为任一集合,我们有:

$$\begin{aligned} t\in x\dot{-}u &\to t\in x\wedge t\notin u\to t\in y\wedge t\notin u \\ &\to t\in y\wedge t\notin z\to t\in y\dot{-}z. \end{aligned}$$

这样,我们就证明了(3.37),而(3.38)是它的一特殊情况.

在上述论证过程中,我们使用了命题逻辑中的蕴涵传递律:

$$A\to B,\quad B\to C\vdash A\to C.$$

这一规则刻划了我们日常思维过程的一个环节,也是很自然的一个环节. 在上一章我们已经谈到了这一环节.

习 题

1. 设 x, y 是任意的集合,证明下述结论恒成立:

(1) $x\cup y=\varnothing\leftrightarrow x=\varnothing\wedge y=\varnothing$,

(2) $x \dot{-} y = x \leftrightarrow y \dot{-} x = y$,

(3) $x \cup y = x \dot{-} y \leftrightarrow y = \varnothing$,

(4) $x \cap y = x \dot{-} y \leftrightarrow x = \varnothing$,

(5) $x \cap y = x \cup y \leftrightarrow x = y$.

2.设 x, y, z 是任意的集合,证明下述命题恒成立.

(1) $x \cup y \subset z \leftrightarrow x \subset z \wedge y \subset z$,

(2) $z \subset x \cap y \leftrightarrow z \subset x \wedge z \subset y$,

(3) $x \subset y \cup z \leftrightarrow x \dot{-} y \subset z$,

(4) $x \subset y \subset z \leftrightarrow x \cup y = y \cap z$.

3.对于任意的集合 x, y, z, u, 证明下述包含式

$$x \dot{-} u \subset (x \dot{-} y) \cup (y \dot{-} z) \cup (z \dot{-} u)$$

恒成立.

§3 对称差及其性质

对于任意的集合 x, y, 我们称

$$x \ddot{-} y := (x \dot{-} y) \cup (y \dot{-} x) \tag{3.39}$$

为 x 与 y 的对称差, 也就是说 $x \ddot{-} y$ 的元素恰好是那样一些元素,它们是属于 x 但不属于 y 或者是属于 y 但不属于 x. 这是借助于并和相对补而定义的一个新的运算.

(1) 对于任意 x, y, z, 运算 $\ddot{-}$ 是交换的和结合的.

$$x \ddot{-} y = y \ddot{-} x, \tag{3.40}$$

$$x \ddot{-} (y \ddot{-} z) = (x \ddot{-} y) \ddot{-} z. \tag{3.41}$$

由 $\ddot{-}$ 的定义(3.39)直接地获得(3.40), 对于 (3.41), 一方面,由定义 (3.39),我们有

$$x \ddot{-} (y \ddot{-} z) = x \ddot{-} ((y \dot{-} z) \cup (z \dot{-} y))$$

$$
\begin{aligned}
&=(x\dot{-}((y\dot{-}z)\cup(z\dot{-}y)))\cup((y\dot{-}z)\cup(z\dot{-}y)\dot{-}x)\\
&=(x\dot{-}(y\dot{-}z))\cap(x\dot{-}(z\dot{-}y))\cup((y\dot{-}z)\dot{-}x)\\
&\quad\cup((z\dot{-}y)\dot{-}x)\\
&=[((x\dot{-}y)\cup(x\cap z))\cap((x\dot{-}z)\cup(x\cap y))]\\
&\quad\cup(y\dot{-}(z\cup x))\cup(z\dot{-}(y\cup x))\\
&=[(x\dot{-}y)\cap(x\dot{-}z)]\cup[(x\dot{-}y)\cap y]\\
&\quad\cup[(x\dot{-}z)\cap z]\cup(x\cap y\cap z)\cup(y\dot{-}(z\cup x))\\
&\quad\cup(z\dot{-}(y\cup x))\\
&=[x\dot{-}(y\cup z)\cup(y\dot{-}(z\cup x)]\cup[z\dot{-}(x\cup y)]\\
&\quad\cup(x\cap y\cap z).
\end{aligned}
$$

在上述过程中我们使用了达·摩尔根定律和下述三个恒等式:

$$(x\cup y)\dot{-}z=(x\dot{-}z)\cup(y\dot{-}z), \qquad (3.42)$$

$$x\dot{-}(y\dot{-}z)=(x\dot{-}y)\cup(x\cap z), \qquad (3.43)$$

$$x\dot{-}(y\cup z)=(x\dot{-}y)\dot{-}z. \qquad (3.44)$$

(3.44)就是定理2.3(3)，前二个恒等式在直观上是显然的，证明也是容易的。

(3.41)的右边，使用(3.40)立即可以得到:

$$(x\ddot{-}y)\ddot{-}z=z\ddot{-}(x\ddot{-}y).$$

所以，我们有

$$
\begin{aligned}
(x\ddot{-}y)\ddot{-}z&=[z\dot{-}(x\cup y)]\cup[x\dot{-}(y\cup z)]\\
&\quad\cup[y\dot{-}(z\cup x)]\cup(z\cap x\cap y)\\
&=[x\dot{-}(y\cup z)]\cup[y\dot{-}(z\cup x)]\cup[z\dot{-}(x\cup y)]\\
&\quad\cup(x\cap y\cap z).
\end{aligned}
$$

这就证明了(3.41).

(2) 交的运算对于$\dot{\dot{-}}$来讲是分配的,即

$$x\cap(y \dot{\dot{-}} z)=(x\cap y) \dot{\dot{-}} (x\cap z). \tag{3.45}$$

事实上,由(3.28)和(3.32)我们可得:

$$\begin{aligned}
& x\cap(y \dot{\dot{-}} z) \\
&= x\cap[(y \dot{-} z)\cup(z \dot{-} y)] \\
&= [(x\cap y) \dot{-} z]\cup[(x\cap z) \dot{-} y] \\
&= [y\cap(x \dot{-} z)]\cup[z\cap(x \dot{-} y)] \\
&= [(y\cap(x \dot{-} (x\cap z))]\cup(z\cap(x \dot{-} (x\cap y))] \\
&= [(x\cap y) \dot{-} (x\cap z)]\cup[(x\cap z) \dot{-} (x\cap y)] \\
&= (x\cap y) \dot{\dot{-}} (x\cap z).
\end{aligned}$$

(3) 空集合在对$\dot{\dot{-}}$运算中的性质

$$x \dot{\dot{-}} \varnothing = x, \tag{3.46}$$

$$x \dot{\dot{-}} x = \varnothing. \tag{3.47}$$

事实上,

$$x \dot{\dot{-}} \varnothing = (x \dot{-} \varnothing)\cup(\varnothing \dot{-} x) = x\cup\varnothing = x.$$

这就获得了(3.46),而(3.47)直接由$\dot{\dot{-}}$的定义获得欲证结果.

(4) $\dot{\dot{-}}$的逆运算还是$\dot{\dot{-}}$,因为

$$x \dot{\dot{-}} (x \dot{\dot{-}} y) = y, \tag{3.48}$$

$$x \dot{\dot{-}} y = z \rightarrow y = x \dot{\dot{-}} z. \tag{3.49}$$

事实上,(3.41)、(3.46)和(3.47)蕴涵

$$x \dot{\dot{-}} (x \dot{\dot{-}} z) = (x \dot{\dot{-}} x) \dot{\dot{-}} z = \varnothing \dot{\dot{-}} z = z.$$

这就获得了(3.48).

若 $x \ddot{-} y = z$ 则 $x \ddot{-} (x \ddot{-} y) = x \ddot{-} z$，所以由(3.48)即得 $y = x \dot{-} z$。

注 1 本节给出证明两集合相等的第五种方法——等式推演法．这一方法的要点是借助于已知的诸等式，并利用相等的自反性、对称性和传递性逐步的推演出欲证的结果．关于等式的这些性质由外延公理可以直接推知。

习　　题

1. 证明：$x \ddot{-} y = (x \cup y) \dot{-} (x \cap y)$。

2. 对于任意集合 x, y 恒有：

$$x \ddot{-} y = \varnothing \leftrightarrow x = y.$$

3. 对于任意的集合 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$，

证明：$x_i = y_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 当且仅当

$$(x_1 \ddot{-} y_1) \cup (x_2 \ddot{-} y_2) \cup \cdots \cup (x_n \ddot{-} y_n) = \varnothing.$$

4. 计算：$(4 \ddot{-} 3) \cup (5 \ddot{-} 4)$。

5. 计算：

(1) $\{3.5\} \ddot{-} \{3.4\}$，

(2) $(6 \ddot{-} 7) \cup (7 \ddot{-} 6)$，

(3) $(6 \ddot{-} 7) \cap (7 \ddot{-} 6)$，

(4) $(8 \ddot{-} 5) \cup (5 \ddot{-} 8)$，

(5) $(8 \ddot{-} 5) \cap (5 \ddot{-} 8)$，

(6) $((7 \ddot{-} 8) \cup (8 \ddot{-} 7)) \cap (5 \ddot{-} 6)$。

第四章　极小元与正则公理

我们已经指出一集合 S 可以是另一集合 S_1 的元素，特别是当我们令 S_1 为单元集合 $\{S\}$ 时．总有 $S\in\{S\}$，亦即 $S\in S_1$．现在问：是否存在一集合 S，使得 $S\in S$ 成立？即集合 S 是否是它自身的一个元素呢？我们现在来讨论这一问题以及与此有关的一些问题．

§1　不空集合的极小元

定义 4.1　对于任意的集合 S_1 与 S_2，当有 $S_1\in S_2$ 且 $S_1\cap S_2=\varnothing$同时成立时，我们就称 S_1 为 S_2 的一极小元．

换句话说，S_1 为 S_2 的一极小元须满足两个条件，一是 S_1 为 S_2 的一元素，二是 S_1 与 S_2 不交，即没有共同的元素．

例 1　令 $S_1=1$, $S_2=\{1, 2\}$，这样有 $S_1\in S_2$ 且

$$S_1=1=\{0\},$$

仅有一个元素为 0，而 S_2 中不含有元素 0（它仅有两个元素，一个为 1，一个为 2），所以 S_1（即 1）为 S_2 的一个极小元．

注意，虽然有 $2\in S_2$，但 $S_2\cap 2=\{1\}\neq\varnothing$，所以 2 不是 S_2 的一极小元．

例 2　1 的极小元为 0，因为 $0\in 1$，并且有 $0\cap 1=\varnothing$．类

似地，可以验证：2 的极小元为 0，3 的极小元为 0，等等.

例 3 令 $S=\{\{1\},\{2\}\}$，可知 $\{1\}$ 为 S 的一极小元，因为 $\{1\}\in S$，且 $\{1\}\cap S=\varnothing$. 同样，$\{2\}$ 也是 S 的一极小元.

由例 3 可知，一集合可有不止一个极小元，即一集合的极小元可以是不唯一的.

例 4 令 $S=\{1,\{1\},\{2\}\}$，不难验证 1 与 $\{2\}$ 是 S 的极小元，$\{1\}$不是 S 的极小元，因为 1 是$\{1\}$与 S 的一个公共元素.

习　　题

1. 求 4 的极小元.
2. 令 $S=\{\{1\},\{1,2\},\{2,3\}\}$，求出它的所有极小元并注明理由.
3. 令 $S=\{1,\{1\},2,\{3\}\}$，求出 S 的所有极小元，并注明理由.
4. 验证 $\{5\}$ 的极小元为 5，$\{6\}$ 的极小元为 6.

§2 正 则 公 理

上节我们给出了若干集合的极小元的例子，但是否每一集合都有一极小元呢？我们来回答这一问题.

正则公理 每一个不空的集合，都存在一极小元.

换言之，正则公理是说，对于任意的集合 S，若 $S\neq\varnothing$，则存在一集合 S_1 使得 $S_1\in S$ 且 $S_1\cap S=\varnothing$.

正则公理亦称基础公理或限制公理，它断定除空集合$\varnothing$之外，任一集合都有极小元，由这一公理我们可推导出集合的

一些性质．我们以后要多次使用集合的这些性质．所以，我们现在来讨论这些性质．

定理 4.1 对于任意的集合 S，都有

$$S \notin S$$

成立．

证明 假定存在一集合 S，使得 $S \in S$ 成立．由 S 做一单元集合 $\{S\}$，显然 $S \in \{S\}$，即 $\{S\}$ 不空，由正则公理 $\{S\}$ 有一极小元，然而 $\{S\}$ 仅有元素 S，故 $S \cap \{S\} = \varnothing$，但是，由假定 $S \in S$，故 S 与 $\{S\}$ 有公共元 S，即 $S \cap \{S\}$ 不空．这就产生了矛盾．因此，假定有一集合 S，使 $S \in S$ 是不对的．即不存在集合 S 使得 $S \in S$ 成立．由此，可获得对于任意的集合 S，都有 $S \notin S$ 成立．

定理 4.2 对于任意的集合 S_1 与 S_2，都有

$$\neg(S_1 \in S_2 \wedge S_2 \in S_1) \tag{4.1}$$

成立．

证明 假定有集合 S_1 与 S_2，使得

$$S_1 \in S_2 \wedge S_2 \in S_1 \tag{4.2}$$

成立．由无序对集合存在公理，构造一集合 $S := \{S_1, S_2\}$．因为 S 不空，故有一极小元，然而 S 仅有元素 S_1 与 S_2，所以，S 的极小元必定是 S_1 或 S_2．不失一般性．我们假定 S_1 为极小元，故有 $S_1 \in S$ 且 $S_1 \cap S = \varnothing$．然而，由 (4.2) 式，我们有 $S_2 \in S_1$，并且由 S 的定义，我们有 $S_2 \in S$，故 S_1 与 S 有一公共元素 S_2，因此有 $S_1 \cap S \neq \varnothing$．这就说明存在 S_1 与 S_2 使得(4.2)式成立是不对的．因此，不存在集合 S_1 与 S_2 使得(4.2)成立．

由此可得，对于任意的集合 S_1 与 S_2，都有(4.1)成立。

定理 4.3 对于任意的集合 S_1, S_2 与 S_3，都有：

$$\neg(S_1 \in S_2 \wedge S_2 \in S_3 \wedge S_3 \in S_1) \tag{4.3}$$

成立.

证明 假定有集合 S_1, S_2, S_3 使得

$$S_1 \in S_2 \wedge S_2 \in S_3 \wedge S_3 \in S_1 \tag{4.4}$$

成立. 由无序对集合存在公理，我们构造集合 $\{S_1, S_2\}$, $\{S_3\}$. 并且由并集合公理，可令

$$S = \{S_1, S_2\} \cup \{S_3\} = \{S_1, S_2, S_3\}.$$

显然，S 不空，并且有三个元素，即 $S_1 \in S$, $S_2 \in S$, $S_3 \in S$. 因为 S 有极小元，不妨设它为 S_1，因此，我们有 $S_1 \cap S = \varnothing$. 然而由(4.4)式，我们有 $S_3 \in S_1$，故 S_3 与 S 有一公共元素 S_3. 即有 $S_1 \cap S \neq \varnothing$，这就获得了矛盾. 类似地，设 S_2 或 S_3 为极小元时，也可获得矛盾. 所以，不存在集合 S_1, S_2 与 S_3 使得(4.4)式成立. 由此可得，对于任意的 S_1, S_2 与 S_3，都有(4.3)式成立.

定理 4.4 对于任意已知的自然数 n，对于任意的集合 S_1, S_2, $\cdots$, S_n，都有：

$$\neg(S_1 \in S_2 \wedge \in S_3 \wedge \cdots \wedge S_{n-1} \in S_n \wedge S_n \in S_1) \tag{4.5}$$

成立.

证明 假定有集合 S_1, S_2, $\cdots$, S_n 使得(4.5)成立. 反复使用无序对集合存在公理和并集合公理，我们可以构造集合

$$S = \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}.$$

因为 S 不空，它必有极小元，不妨假定它是 S_i, $1 \leqslant i \leqslant n$

即有

$$S_i \in S \text{ 且 } S_i \cap S = \varnothing.$$

然而，由(4.5)我们可得当 $i=1$ 时，有 $S_n \in S_i$，当 $i \neq 1$ 时，有 $S_{i-1} \in S_i$，并且 $S_n \in S$，$S_{i-1} \in S$（当 $i \neq 1$ 时）。因此，S_i 与 S 有公共元素，所以有 $S_i \cap S \neq \varnothing$。这与 $S_i \cap S = \varnothing$ 矛盾。因此，定理得证.

注 1 定理 4.4 的证明是使用了归谬律. 而定理 4.1—4.3 的证明中除了使用归谬律外，定理 4.1 还使用了由"不存在集合 S 使得 $S \in S$"去推演出"对于任意的集合 S，都有 $S \notin S$ 成立"的规则，定理 4.2 使用了由"不存在集合 S_1，S_2 使得 $S_1 \in S_2 \wedge S_2 \in S_1$ 成立"去推演出"对于任意的集合 S，都有 $\neg(S_1 \in S_2 \wedge S_2 \in S_1)$ 成立"的规则. 定理 4.4 使用了由"不存在集合 S_1，S_2，$\cdots$，S_n 使得 $S_1 \in S_2 \wedge \cdots \wedge S_{n-1} \in S_n \wedge S_n \in S_1$ 成立"去推演出"对于任意的集合 S_1，S_2，$\cdots$，S_n 都有

$$\neg(S_1 \in S_2 \wedge \cdots \wedge S_{n-1} \in S_n \wedge S_n \in S_1)$$

成立"的规则. 一般说，它们使用了由"不存在集合 S_1，S_2，$\cdots$，S_n 使得 $A(S_1, \cdots, S_n)$ 成立"能够推演出"对于任意 S_1，S_2，$\cdots$，S_n 都有 $\neg A(S_1, \cdots, S_n)$ 成立". 这关系到谓词演算的基本规则，第二章 § 6 中的注 5 仅是这一注解的特殊情况.

§ 3 奇异集合

定义 4.2 集合的任一序列：S_0，S_1，S_2，$\cdots$，S_{n-1}，S_n，

$S_{n+1}\cdots$，如果它们满足

$$\cdots S_{n+1}\in S_n \wedge S_n \in S_{n-1} \wedge \cdots \wedge S_2 \in S_1 \wedge S_1 \in S_0 \quad (4.6)$$

则称这一序列为 $\in$ 降链．其中(4.6)常被缩写为：

$$\cdots S_{n+1}\in S_n \in S_{n-1} \in \cdots \in S_2 \in S_1 \in S_0. \quad (4.7)$$

定义 4.3 如果一集合 S 中存在 $\in$ 降链，就称 S 为奇异的．换言之，S 为一奇异集合就意味着在 S 中有集合 S_0，S_1，S_2，$\cdots$，S_n，S_{n+1}，$\cdots$ 满足(4.7)式．

本节主要讨论奇异集合与极小元的联系，即奇异集合与正则公理的联系．

定理 4.5 假定集合 S 是奇异的，则存在 S 的一非空子集合 S'，使 S' 中无极小元．

证明 假定 S 为一奇异集合，也就是说，S 中有元素 S_0，S_1，S_2，$\cdots$，S_{n-1}，S_n，S_{n+1}，$\cdots$ 满足(4.7)式．此时，我们可构造 S 的一非空子集合 S' 如下：

$$S' := \{S_0, S_1, S_2, \cdots, S_{n-1}, S_n, S_{n+1}, \cdots\}.$$

因为 S' 不空，并且由 S' 的定义可知，若 S' 有一极小元，则必须是某一个元素 S_i，$0\leqslant i$．即 $S_i\in S'$ 且 $S_i\cap S'=\varnothing$．然而，由于 S' 的元素满足(4.7)，故有 $S_{i+1}\in S_i$ 成立．由此，我们有：S_i 与 S' 有一公共元素 S_{i+1}（由 S' 的定义，可知 $S_{i+1}\in S'$）．故 $S_i\cap S'\neq\varnothing$．这就矛盾于 S_i 是 S' 的一极小元的假定．所以，S_i 就不能是 S' 的一极小元．

推论 4.1 在正则公理的前提下，不存在一集合 S 使得 S 是奇异的．

定理 4.6 对于任意的非空集合 S，如果 S 不是奇异集

合，则 S 中必有一极小元（本定理的证明中不用正则公理）。

证明 假定上述定理不成立，即 S 没有极小元，即对于任意的集合 $S_0 \in S$，都有一集合 S_1 使得 $S_1 \in S_0$ 且 $S_1 \in S$ 成立。当然 S_1 也不可能是 S 的极小元，因此，又有一集合 S_2，使得 $S_2 \in S_1$ 且 $S_2 \in S$ 成立。继续这一手续，假定已有集合 $S_n \in S$ 满足 $S_n \in S_{n-1}$，对于集合 S_n，它当然不可能是 S 的极小元，因此，就有一集合 S_{n+1}，使得 $S_{n+1} \in S_n$ 且 $S_{n+1} \in S$ 成立，以此类推，我们即可获 S 中的一降链存在。因此 S 就是一奇异集合了。这与定理的前提矛盾。这就完成了定理 4.6 的证明。

注 2 由上述定理，我们知道若存在奇异集合，则正则公理不成立；反之，若肯定正则公理，则不存在奇异集合。这就说明，正则公理是限制性的，它排除了奇异集合的存在。事实上，定理 4.1—4.4 也都是为了排除 $\in$ 降链，排除奇异集合。比如定理 4.1 是断定不存在集合 S 使得 $S \in S$。如果不是这样，而是存在一集合 S，使得 $S \in S$。这样，我们令 $S_n = S$，（当 $n = 0, 1, 2, \cdots$ 时）。这就获得一 $\in$ 降链。由此，就获得一奇异集合。

注 3 本书所谈及的集合论公理起源于蔡梅罗（E. Zermelo）1908年的论文，后经许多著名学者修改补充的结果。正则公理的内容在蔡梅罗 1908 年的论文中并未谈及，第一次涉及这一问题的是米尔马诺夫（D. Mirimanoff），他在 1917 年发表的两篇论文提出了奇异集合的问题。当然，人们认为应当排除这种奇异集合。著名数学家冯·诺伊曼（Von Neumann）1925 年的论文中首次提出了正则公理。

习　　题

1. 使用正规公理证明：不存在集合 S_1，S_2，S_3 和 S_4 使得

$$S_4 \in S_3 \in S_2 \in S_1 \in S_4$$

成立.

2. 对于任意的集合 S，证明：S 是单元集合 $\{S\}$ 的唯一的极小元.

§4 本　　元

我们曾经指出，任何类型的对象都可以作为一集合的元素，特别地集合也可以作为对象，一集合可以作为其它集合的元素．我们称那些不是集合的对象为本元(有时也称之为原子或个体)．也就是说，本元只能作集合的元素，而它自身并不是集合，例如，为了某种需要，我们讨论英文字母的集合时，这些字母就是本元(当然，我们常说集合 S_1，S_2 等等，这时我们的意思是 S_1，S_2 代表两个集合．而不是指字母本身)．又如，我们说三只羊组成的集合，五只鸡组成的集合等等，这时羊鸡本身都不是集合，它们只能做集合的元素，就是说，它们都是本元．从应用角度考虑问题，我们常常需要这些本元．在本书第一章中，我们说 x 是任意对象时，常常指 x 是一本元，或一集合，有时我们也用"任意一对象"指"任意一集合"．因为从理论角度或者说从纯数学角度，我们可以不必研究本元，而把我们的注意力仅限制在纯集合论(不讨论本元的集合论)上来，这样能简化我们的讨论步骤，所以，今后我们的一切讨论都是针对纯集合论进行的．我们说"对于任意的对象"和说

“对于任意的集合”是完全一样的，我们不讨论集合以外的对象，当读者为了解决某些问题，需要涉及含本元的集合时，既可以用某种集合去代表它，比如用某些自然数的单元集合去代表它们.也可以仿照本书的方法去分析所要研究的对象.当然，为了通俗起见，在某些通俗的例子中，我们也提到本元，如张三，李四，关羽，张飞等等.那只是通俗地说明某些数学概念的背景，而不是理论知识本身，删掉这些涉及本元的例子，并无损于理论.

§5 关于逻辑词的几项缩写

我们已经使用圆括号表示一命题式中各子命题的结合次序．例如我们用 $((A\wedge B)\rightarrow C)$ 表示：如果 A 且 B，则 C．而且它不能是其它含义，但是，当我们规定在一公式或命题中合取词结合能力强于蕴涵词时，我们可以把上述公式写成 $(A\wedge B\rightarrow C)$，或者直接写作 $A\wedge B\rightarrow C$，这时，它的含义不变，仍然是：如果 A 且 B，则 C．当我们要表达：“A 并且如果 B 则 C”时，我们就使用公式 $A\wedge(B\rightarrow C)$.

为方便起见，今后我们依照命题连接词结合能力由强到弱的次序，把它们排列成

$$\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow.$$

也就是说，否定词 $\neg$ 的结合能力最强．其次是合取词 $\wedge$，再次是析取词 $\vee$，然后是蕴涵词 $\rightarrow$，最后是双蕴涵词 $\longleftrightarrow$，即 $\longleftrightarrow$ 的结合能力最弱．例如命题 $\neg A\wedge B$ 是命题 $((\neg A)\wedge B)$ 的

缩写. 而命题 $\neg A \to B$ 是命题 $((\neg A) \to B)$ 的缩写. 命题 $\neg A \wedge \neg B \vee A \to C \vee D$ 为命题

$$((((\neg A) \wedge (\neg B)) \vee A) \to (C \vee D))$$

的缩写. 命题

$$\neg A \vee \neg B \wedge C \to D \leftrightarrow A \wedge E$$

是命题

$$((((\neg A) \vee ((\neg B) \wedge C)) \to D) \leftrightarrow (A \wedge B))$$

的缩写.

公式、命题的另一种缩写起源于结合律,比如,因为 $l \cdot 20$ 为

$$(((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))).$$

这就说明先合取 A 与 B, 再由 $(A \wedge B)$ 与 C 合取的结果, 与先合取 B 与 C, 再由 A 与 $(B \wedge C)$ 合取的结果, 它们的真值相同, 于是从真假值的角度,我们可以用公式 $A \vee B \vee C$ 去表示命题 $((A \wedge B) \wedge C)$, 同样, 它也可以去表示公式 $(A \wedge (B \wedge C))$. 类似地对析取式也是成立的. 所以, 我们用公式 $A \vee B \vee C$ 表示 $((A \vee B) \vee C)$, 同样,它也可以去表示 $(A \vee (B \vee C))$.

对于否定词,我们可以用命题 $\neg\neg A$ 去表示命题

$$(\neg(\neg A)),$$

$\neg\neg\neg A$ 表示 $\neg(\neg(\neg(A)))$. 关于连接词的这些缩写, 还可以对有穷多个连接词作相应的规定.

公式的这样缩写是很有用的. 并且我们已经在前几章中使用过一些简单的缩写.

对于量词,我们也将使用一些缩写,这就是:

$$\forall x\in yA(x):=\forall x(x\in y\rightarrow A(x)),$$

$$\exists x\in yA(x):=\exists x(x\in y\wedge A(x)),$$

$$\exists!xA(x):=\exists x(A(x)\wedge\forall y(A(y)\rightarrow y=x)).$$

其中 $\forall x\in yA(x)$ 与 $\exists x\in yA(x)$ 为受囿量词, $\forall x\in yA(x)$ 意指在集合 y 中所有的 x 都使得 $A(x)$ 成立. $\exists x\in yA(x)$ 意指在集合 y 中,有一元素 x 使得 $A(x)$ 成立. $\exists!xA(x)$ 意指有一个且仅有一个集合 x, 使得 $A(x)$ 成立,并且 $\exists!xA(x)$ 通常读做"存在唯一的集合 x, 使得 $A(x)$ 成立".

习　　题

1.试给出命题

$$((A\wedge(B\vee C))\leftrightarrow((A\wedge B)\vee(A\wedge C)))$$

的缩写命题.

2.试给出命题

$$((((A_1\vee A_2)\vee A_3)\rightarrow B)\leftrightarrow(((A_1\rightarrow B)\wedge(A_2\rightarrow B))\wedge(A_3\rightarrow B)))$$

的缩写命题.

3.给出下述命题

$$\exists x\in y\forall z\in u((R(x,z)\leftrightarrow((x\in y\vee x=y)\vee y\in x))$$

的原来形式.

4.给出命题

$$\forall y\forall z\exists x(x=\{z,y\}\wedge\forall u(u=\{z,y\}\rightarrow u=x))$$

的原来形式,使得其中不出现大括号.

第五章 自然数集合与数学归纳法

本章§1描述作为特别集合的自然数，定义自然数的大小次序，前驱与后继等概念. §2给出无穷公理：存在一无穷集合即由所有自然数可以形成一个集合. §3讨论归纳集合与数学归纳法. §4使用数学归纳法证明自然数和自然数集合ω的若干性质. §5给出自然数的加法运算、乘法运算和乘方运算的概念. §6讨论算术加法与算术乘法的初等性质，目的在于揭示数学归纳法的应用，这种应用是极为广泛的，而且是很基本的.

§1 自 然 数

在第一章§5中我们已经把自然数定义为一些特定的集合，即n是一自然数，或者$n=0$，或者有一自然数m使得$n=m^+$，其中m^+为$m\cup\{m\}$，亦记做$m+1:=m\cup\{m\}$. 我们有：

$$m+1=\{0,1,\cdots,m\}.$$

我们已经指出，0是空集合，它没有任何元素，1是一个元素的集合. 我们不选择有一把椅子或一张桌子的集合去表示1，也不选择单元集合$\{1\}$,$\{2\}$,$\{3\}$去表示1，甚至对一般

集合 S，也不把 $\{S\}$ 选择为表示 1 的集合，而是取 $\{0\}$ 为 1，是以 0 为元素的单元素集，2 有两个元素 0 与 1，3 有三个元素 0,1 与 2，等等. 这种表示自然数的办法，是冯·诺伊曼给出的. 看起来似乎很奇怪，然而作为理论工具，用起来却很简便.

为了研究自然数的大小次序，我们有下述定义.

定义 5.1 对于任意的两个自然数 m，n，令

$$m < n :\!= m \in n.$$

$$m \leqslant n :\!= m < n \vee m = n.$$

由定义即可推知：对于任意的自然数 m 与 n，

$$m \subset n \quad \text{当且仅当} \quad m \leqslant n,$$

$$m \subset_+ n \quad \text{当且仅当} \quad m < n,$$

$$m \subset_+ n \quad \text{当且仅当} \quad m \in n.$$

并且可以令

$$n > m :\!= m < n,$$

$$n \geqslant m :\!= m \leqslant n.$$

定义 5.2 对于任意给定的集合 x 与 y，如果有 $x = y^+$，即有 $x = y \cup \{y\}$，我们称 x 为 y 的后继，并且这时称 y 为 x 的前驱. 特别是对任意两个自然数 m 与 n，如果有 $m = n^+$，即 $m = n \cup \{n\}$，我们称 m 为 n 的后继. 并且这时称自然数 n 为自然数 m 的前驱，可以记做 $n = m - 1$.

对于任意的集合(包括自然数)都有它的后继. 因为任给一集合 x，我们总可以有集合 $\{x\}$ 与 $x \cup \{x\}$，即都有它的后继 x^+，然而并非一切集合都有它的前驱. 如空集合 $\varnothing$ 没有前驱. 单元集合 $\{x\}$ (当 $x \neq \varnothing$ 时) 也没有前驱. 没有前驱的

集合也就是说它自己不是一后继集合，这类集合的例子很多，有的还可能是有很多元素的集合．一集合 x 是没前驱的，也就是说"$x-1$"是不存在的(这时"$x-1$"的记法是没有意义的)。

§2 无穷公理

我们已经定义了什么叫自然数，而且我们已经从 $\varnothing$ 开始构造了许许多多集合．甚至我们已经有了无穷多个集合．但是至今我们还没有给出一个集合，它有无穷多个元素．试问：存在着一个有无穷多个元素的集合吗？

另一方面，我们已经定义了一个自然数，它们都是些特殊的集合，然而，所有这些自然数能够形成一个集合吗？

我们现在来回答上述两个问题．事实上，只要对第二个问题作肯定性的回答，即所有自然数组成一个集合(它当然是无穷的)，也就对第一个问题作了肯定性地回答．然而从我们至今已经引进的公理还无法回答上述问题．这就要求我们引进新的公理．

无穷公理 存在着一个由所有自然数所组成的集合．

依据外延公理可知恰好由所有自然数所组成的集合是唯一的．并且记做 ω．换句话说，对于任一集合 S，都有 $S\in\omega$，当且仅当 S 是一自然数．以后，我们常常用 n，m 表示自然数，即常常用 n，m 表示 ω 的元素．

注 1 一集合 S 叫做有穷的，如果有一个自然数 n，使得

S恰好有n个元素. 这时记做$\overline{\overline{S}}=n$ ($\overline{\overline{S}}$表示集合S的元素的个数,这个概念以后还要严格定义).按照这一概念,也可理解ω是一无穷集合,由于ω是所有自然数所组成的集合,也可以获得ω是没有前驱的,因为假定有一集合S是ω的前驱,亦即$S=\omega-1$,而$\omega=S\cup\{S\}$, 所以$S\in\omega$, 因此,S是一自然数,这样S^+就是一自然数,并且$\omega=S^+$是一自然数,所以$\omega\in\omega$,与正则公理相矛盾. 这样,我们就获得了ω没有前驱. 因此,我们不允许有"$\omega-1$"这样的记号.

§3 归纳集合与数学归纳法

定义 5.3 如果集合S满足下述两个条件:

(1) $0\in S$,

(2) 对于任意的集合u, 若$u\in S$, 则$u^+\in S$,则S叫做归纳的.

定理 5.1 ω是一归纳集合,并且若S是一归纳集合,则$\omega\subset S$.

证明 首先证明ω是归纳集合. 因为0是一自然数. 由ω的定义,有$0\in\omega$. 又因为若n是自然数,即$n\in\omega$, 由自然数的定义,这时$n+1$是一自然数. 所以有$n+1\in\omega$. 因此,ω满足定义4.3的条件. 即ω是一归纳集合.

再证: $\omega\subset S$. 假定$\omega\not\subset S$, 即有某一$n\in\omega$且$n\notin S$. 所以$\omega\dot{-}S$不空. 由正则公理就有一个$m\in\omega\dot{-}S$且

$$m\cap(\omega\dot{-}S)=\varnothing.$$

即m是 $\omega \dot{-} S$ 的一个极小元. 所以就有 $m-1 \in S$(因为S是一归纳集合. 即 $0 \in S$ 且 $1 \in S$, 故 $m \neq 0$,因此, $m-1$ 有定义). 但是由于S是归纳的,由 $m-1 \in S$, 就应该有 $m \in S$(因为 $m=(m-1)^{+}$). 与 $m \notin S$ 相矛盾. 因此,$\omega \subset S$.

定义 5.4 如果集合 S 是一归纳集合,并且 $S \subset \omega$. 则称 S 为ω的一个归纳子集合.

定理 5.1 所揭示的事实可以重述如下:

推论 5.1 (ω 的归纳原则) ω的任何归纳子集合都与ω相等.

依据ω的归纳原则我们可以叙述一种方法叫做数学归纳法. 这种方法在数学证明中是很有用的. 在下节中我们将使用这一方法证明自然数集合ω的许多性质,我们还要多次使用这一方法.希望读者注意这一方法的要点和应用的灵活性.

数学归纳法是这样的一种方法,为了证明ω的一个子集合S就是ω自身(即证明 $S=\omega$),我们采用下述两个步骤:首先验证 $0 \in S$; 其次需证明,对任意的集合 u, 若 $u \in S$, 则 $u^{+} \in S$, 也就是说,S对于取后继运算是封闭的.

数学归纳法(集合形式) 对于ω的任一子集合S,如果能够证明: $0 \in S$ 并且对于任意的集合u, 若假定 $u \in S$ 成立,则能推演出 $u^{+} \in S$ 成立,那么就有 $S=\omega$.

注 2 上述第二步是从S的任意元u出发,去推演出u^{+}也在S中. 也就是说不能是仅从S的某些元素u出发能推演出 $u^{+} \in S$, 就断定 $S=\omega$. 这就是说数学归纳法的前提是普遍的,而不是特殊的,不是对S的某一元而言,而是要求对于

它的一切元都满足关于后继运算的封闭性质. 不要把数学归纳法与通常的归纳法混为一谈.

在使用数学归纳法时,常常会遇到一些不是集合的形式,而是性质的形式,这就是某种关于自然数的性质,我们知道0具有这种性质,并且从假定任一自然数 n 有这种性质出发,可以推演出 $n+1$ 也有这种性质. 那么对于一切自然数而言是否都有这种性质呢? 这就是这种形式的数学归纳法所要回答的问题.

数学归纳法(性质形式) 用 $A(n)$ 表示自然数 n 有性质 A,假定已知 $A(0)$成立,并且对任意的自然数 n,从假定 $A(n)$ 成立,可推演出 $A(n+1)$ 成立,那么我们就获得了对一切自然数 n, 都有 $A(n)$ 成立.

注3 数学归纳法是对自然数集合结构一种重要刻划. 比如, 著名的皮阿诺 (Peano) 算术公理系统, 简单说来, 它是由自然数0和后继运算在集合 ω 上的结构, 人们常常记做 $\langle\omega, 0, +\rangle$, 它的公理为下述三条. 当然这三条公理,都是我们陈述的集合论中的定理:

(1) 对于任一自然数 n, $n^+ \neq 0$,

(2) 对于任意的自然数 m, n, 都有:

$$m^+ = n^+ \rightarrow m = n,$$

(3) 对于任一集合 $S\subset\omega$, 我们有:

$$(0 \in S \wedge \forall x(x \in \omega \rightarrow (x \in S \rightarrow x^+ \in S)))$$
$$\rightarrow S = \omega.$$

注4 在使用数学归纳法时应特别注意三点. 第一, 验

证 $A(0)$ 成立．对于集合的形式是验证 $0 \in S$．这是使用数学归纳法的前提之一；第二，对任一自然数 n，假定 $A(n)$ 成立，(或 $n \in S$) 去推演出 $A(n+1)$ (或 $n+1 \in S$) 也成立．这个推演是必要的，这是使用数学归纳法的前提之二；第三，在获得上述两个前提之后，就可依据数学归纳法获得，对一切自然数 n，都有 $A(n)$ 成立 (或 $S=\omega$)． 我们的结论是 $\forall n A(n)$ 成立，而不是命题 $A(\omega)$ 成立，或者说，我们获得的是 $S=\omega$，而不是 $\omega \in S$．对于上述三点，初学者可能出现这样那样的错误．都是由于不理解数学归纳法的实质所致．应特别慎重．

注 5 在实际使用数学归纳法时，对于初始条件 $A(0)$ (或 $0 \in S$) 可作如下推广，从而结论也有所改变．这就是：对于某一取定的自然数 n_0，先验证 $A(n_0)$ 成立(或 $n_0 \in S$)，再证明对于任意的自然数 n，$n_0 \leqslant n$，假定 $A(n)$ 成立(或 $n \in S$)；就可以推演出 $A(n+1)$ 成立 (或 $n+1 \in S$)．于是我们有，对于一切自然数 $n(n_0 \leqslant n)$，都有 $A(n)$ 成立 (或者 $S=\omega \dot{-} n_0$)。

§4 自然数集合的性质

本节讨论自然数集合的一些重要性质，这些性质是使用数学归纳法证明的． 所以，也可以把本节看做数学归纳法的应用．

定理 5.2 除 0 以外的每一个自然数都是后继数。

证明 令

$S := \{n \mid n \in \omega \wedge (n = 0 \vee \exists m(m \in \omega \wedge n = m^+))\}$.
这样，$0 \in S$，而且，若令 $K \in S$，因为 K^+ 为 K 的后继，故有 $K^+ \in S$，因此，由数学归纳法，就有 $S = \omega$. 即欲证结果成立.

定义 5.5 一集合 S 叫做传递的，如果它的任一元素的元素仍是 S 的元素. 换言之，对于所有的集合 S_1 与 S_2，若 $S_1 \in S_2$ 且 $S_2 \in S$，则 $S_1 \in S$.

定理 5.3 每一个自然数都是一个传递集合.

证明 令 $S := \{n \mid n \in \omega \wedge n$ 为一传递集合$\}$. 因为 0 没有任何元素. $S_2 \in 0$ 永假，所以

$$S_1 \in S_2 \wedge S_2 \in 0 \to S_1 \in 0$$

为一真命题. 即有 $0 \in S$，0 为一传递集合.

现在假定 $n \in S$，即 n 为一传递集合，我们欲证 $n+1 \in S$. 假定对于任意的集合 S_1 与 S_2，若有 $S_1 \in S_2$ 且 $S_2 \in n^+$，我们需证 $S_1 \in n^+$. 因为由 $S_2 \in n^+$，等价地有 $S_2 \in n \vee S_2 = n$. 由此我们获得:

(1) $S_1 \in S_2 \wedge S_2 \in n$,

或者(2) $S_1 \in S_2 \wedge S_2 = n$.

在(1)成立时，由 n 的传递性，我们有 $S_1 \in n$. 此时，当然有 $S_1 \in n^+$. 在(2)成立时，因为 S_2 等于 n，故由 $S_1 \in S_2$ 得到 $S_1 \in n$，当然也有 $S_1 \in n^+$. 所以，不管哪种情况，都有 $S_1 \in n^+$. 因此，n^+ 是传递的，即 $n^+ \in S$.

综上，由数学归纳法，即获得 $S = \omega$.

定理 5.4 ω 为一传递集合.

证明 因为一集合是传递的，就意味着它的每一元素都

是它的一个子集合. 所以,ω是传递的,就意味着ω的每一元素都是ω的子集合. 因此,我们令:

$$S:=\{n \mid n\in\omega \wedge n\subset\omega'\}.$$

我们须证明S是归纳的. 显然,$0\in S$. 若$K\in S$时,则有

$$K\in\omega \text{ 且 } \{K\}\subset\omega,$$

于是,$K\cup\{K\}\subset\omega$, 即$K^+\subset\omega$. 从而$K^+\in S$. 依据数学归纳法,$S=\omega$.

定义 5.6 如果对于任意的集合S_1, $S_2\in S$, 那么

$$S_1\in S_2,\quad S_1=S_2,\quad S_2\in S_1$$

三式中恰好有一个成立,则称集合S有三岐性.

定理 5.5 集合ω有三岐性.

证明 先证对于任意的自然数m, n, 都有:

$$m\in n\vee m=n\vee n\in m \tag{5.1}$$

成立

令

$$A(n)=\forall m(m\in\omega\rightarrow(m\in n\vee m=n\vee n\in m)).$$

即$A(n)$表示"对于所有的自然数m, 都有(5.1)成立". 为此,我们先证$A(0)$成立,即证明

$$\forall m(m\in\omega\rightarrow(0\in m\vee 0=m\vee m\in 0))$$

成立,这就是"对于任一自然数m, 都有

$$0\in m\vee 0=m\vee m\in 0 \tag{5.2}$$

成立". 我们令$B(m)$表示(5.2),即令

$$B(m):=0\in m\vee 0=m\vee m\in 0,$$

所以,$A(0)$就是表示"对于一切自然数m, 都有$B(m)$成

立”. 因为 $0=0$, 所以有 $B(0)$ 成立.

设对于任一自然数 K. 都有 $B(K)$ 成立,即

$$0\in K\vee 0=K\vee K\in 0. \tag{5.3}$$

因为对于(5.3)式中只能是 $0\in K\vee 0=K$, 不管那一种情形, 都有 $0\in K^+$, 所以有 $B(K^+)$ 成立. 由数学归纳法可得,“对于一切自然数 m, 都有 $B(m)$ 成立”. 亦即 $A(0)$ 成立.

假定,对于任意的自然数 K, 都有 $A(K)$ 成立,即有

$$m\in K\vee m=K\vee K\in m, \tag{5.4}$$

我们来推演 $A(K^+)$ 成立.

若 $m\in K$, 此时有 $m\in K^+$, 所以有 $A(K^+)$ 成立.

若 $m=K$, 此时有 $m\in K^+$, 所以有 $A(K^+)$ 成立.

若 $K\in m$, 此时有 $K^+\in m\vee K^+=m$, 因此也有 $A(K^+)$. 由(5.4)及上述论证,我们都有 $A(K^+)$ 成立. 因此, 由数学归纳法,我们就有“对于每一自然数 n, 都有 $A(n)$ 成立”. 这就完成了(5.1)的证明.

其次, 我们再证明对于任意的自然数 m, n, 下列式子中

$$m\in n,\quad m=n,\quad n\in m$$

至多有一个成立. 我们假定有

$$m\in n\wedge n\in m$$

成立,但是这与定理 4.2 矛盾. 其它情况比如有

$$m\in n\wedge m=n$$

成立,可得 $m\in m$, 这同定理 4.1 矛盾. 因此, 我们完成了欲证结果.

由定义 5.1 和定理 5.5,我们立刻获得下述推论 5.2

推论 5.2 对于任意的两个自然数 m, n 有:

$$m < n \vee m = n \vee n < m$$

成立.

推论 5.3 每一自然数都具有三歧性.

推论 5.3 是由定理 5.5 与 ω 的传递性直接获得的.

§5 自然数算术

在初等数学中,对于自然数进行加法运算、减法运算、乘法运算和除法运算通称为算术运算.事实上,在自然数范围内,或者说在自然数集合 ω 中,加法运算和乘法运算是封闭的,也就是说任给二个自然数,它们相加、相乘的结果仍然是一自然数. 然而,对减法和除法却是不封闭的,也就是说对某些自然数它们相减或相除是没有意义的. 因此,在自然数集合中的算术运算或自然数算术运算中应主要讨论加法与乘法, 而减法只是在特殊情况下加法的逆运算, 除法只是在特殊情况下乘法的逆运算, 并且能够利用加法与乘法把它们分别地定义出来. 现在我们在自然数集合 ω 中定义加法运算 $+_\omega$ 和乘法运算 $\cdot_\omega$(在不致于引起混淆时,下标 ω 可以被省略, 甚至"·"也可省略)如下:

定义 5.7 对于任意的自然数 m, n, 我们用下述二式给出加法运算:

(1) $m + 0 = m$,

(2) $m + n^+ = (m + n)^+$.

例 1　$m+1=m+0^+=(m+0)^+=m^+$.

例 2　$m+2=m+1^+=(m+1)^+=m^{++}$.

由例 1 可知，集合 $m+1$ 就是集合 m^+，这样 $m+1$ 比 m 多一个元素 m，即 $m+1$ 为 $m\cup\{m\}$，由例 2 集合 $m+2$ 为 m^{++}，这样 $m+2$ 比 m 多 2 个元素，即 $m+2$ 为 $m\cup\{m, m+1\}$. 所以，加法就是把被加数的集合 m 打开，再增加数目与加数集合相同的某些新的元素所形成的集合. 为了保证所得结果仍然是一自然数，当加数为 n 时，新添的元素应是从 m 起，即 $m, m+1, m+2, \cdots$，一直到 $m+(n-1)$ 为止，其中 $n-1$ 为 n 的前驱. 这一过程适用于加法运算的一切情况，例如 $10+5$ 就是先打开 10，即考察它的元素为 $0, 1, \cdots 9$，然后增加 5 个新的元素 $10, 11, 12, 13, 14$，即

$$\{0, 1, 2, \cdots, 9\}+\{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$=\{0, 1, \cdots, 9\}\cup\{10, 11, 12, 13, 14\}$$
$$=\{0, 1, 2\cdots, 13, 14,\}=15$$

定义 5.8　对于任意的自然数 m, n，我们用下述二式给出二数的乘法运算:

(1) $m\cdot 0=0$,

(2) $m\cdot n^+=m\cdot n+m$.

例 3　$m\cdot 1=m\cdot 0^+=m\cdot 0+m=m$.

例 4　$m\cdot 2=m\cdot 1^+=m\cdot 1+m=m+m$.

由例 3 可知，对于任意的自然数 m，它乘以 1 的结果仍然是 m. 由例 4，$m\cdot 2=m+m$，而自然数 $m+m$ 正是

$$\{0, 1, \cdots, m, m+1, \cdots, m+(m-1)\}.$$

也就是把m打开，再放入m个较$m-1$大的连续的m个元素．也可以看做是m的每一元素都相继配上两个新的较大的自然数所形成的集合．

例5　$m\cdot 3=m\cdot 2^{+}=(m+m)+m$．

例6　$m\cdot 4=m\cdot 3^{+}=(m+m+m)+m$．

由例5可知，对于任意的自然数m，它乘以3的结果为$m+m+m$，这就是把集合m打开，由小至大，把其中每一元分别配上三个由小到大的不同的自然数，所逐步形成的集合为结果集合．而例6是将上述过程中的“三个”改成“四个”．即把m中的每一个元分别配上四个由小到大的不同的自然数，所逐步形成的集合为结果集合．

例7　计算5.3，这时就是把5中的每一元依次都扩充3个数目，0扩充为0，1，2；1扩充为3，4，5；2扩充为6，7，8；3扩充为9，10，11；4扩充为12，13，14．也就是

$$
\begin{aligned}
5\cdot 3=\{&\underset{\downarrow}{0},\quad \underset{\downarrow}{1},\quad \underset{\downarrow}{2},\quad \underset{\downarrow}{3},\quad \underset{\downarrow}{4}\}\cdot 3\\
=\{&\overbrace{0,1,2},\overbrace{3,4,5},\overbrace{6,7,8},\overbrace{9,10,11},\overbrace{12,13,14}\}\\
=15&.
\end{aligned}
$$

例8　计算$4\cdot 5$，这时就是4中的每一元依次都扩充5个数目；0扩充为0，1，2，3，4；1扩充为5，6，7，8，9；2扩充为10，11，12，13，14；3扩充为15，16，17，18，19．也就是

$$
\begin{aligned}
4\cdot 5=\{&\underset{\downarrow}{0},\quad \underset{\downarrow}{1},\quad \underset{\downarrow}{2},\quad \underset{\downarrow}{3}\}\cdot 5\\
=\{&\overbrace{0,1,2,3,4},\overbrace{5,6,7,8,9},\overbrace{10,11,12,13,14},\overbrace{15,16,17,18,19}\}\\
=20&.
\end{aligned}
$$

综上所述，当 $m \neq 0$，$n \neq 0$ 时，加法运算是在被加数 m 这一集合上增加加数所表示的元素的个数，先把加数集合中的元素逐一替换成恰好大于 m 中最大元的元，然后进行并集合运算，即得结果数. 而乘法运算实质上是一种扩张运算，把被乘数集合的每一元（由小到大）分别扩张为 n 个，保持这些元素都不同，从 0 开始逐一增加 1 的自然数. 即由小到大把 m 中的元素都扩张完毕了. 汇合起来所获得的元素形成的一集合就是我们的结果集合.

注 7 上述计算两个自然数的加法和乘法的过程，有三个显著的特点，一是机械性质，也就是步骤是确定的；每一步骤所获得的对象也是可以机械地获得的；二是计算步骤的有穷性，对于任给的自然数 m，n，总是可以经过有穷步骤获得欲求结果；三是对象的有穷性，也就是说，我们的加法与乘法都是在有穷集合（因为 m，n 都是给定的自然数，并且在计算过程中没有出现非有穷集合）上进行的.

上述定义的自然数的加法运算和乘法运算和初等数学中的相应运算是一致的. 因此，我们也称这里定义的加法运算 $+_\omega$ 为算术加，乘法运算 $\cdot_\omega$ 也称为算术乘. 我们将在第十章建立它们的逆运算.

定义 5.9 对于任意的自然数 m 和 n，且 $0 < m$，我们用下述二式给出二数的乘方运算，也就是：

(1) $m^0 = 1$，

(2) $m^{n^+} = m^n \cdot m$.

由定义 5.9，立即有 $m^2 = m \cdot m$，并且有 $m^3 = m \cdot m \cdot m$.

上述乘方的定义也是在自然数的基础上给出的，因此也称为算术乘方。乘方是乘法运算的推广，这里就不详细讨论它了。

§6 算术加法与乘法的初等性质

引理 5.1 对于任意的自然数 m 和 n，都有

$$m^+ + n = (m + n)^+$$

成立。

证明 当 $n = 0$ 时，因为 $m^+ + 0 = m^+$，并且 $m + 0 = m$，所以 $(m + 0)^+ = m^+$。因此，我们有 $m^+ + 0 = (m + 0)^+$ 成立。现在假定，对于任意的自然数 K，都有 $m^+ + K = (m + K)^+$，我们来证明

$$m^+ + K^+ = (m + K^+)^+$$

成立。这是因为

$$\begin{aligned} m^+ + K^+ &= (m^+ + K)^+ && \text{(由定义 5.7)} \\ &= (m + K)^{++} && \text{(由归纳假设)} \\ &= (m + K^+)^+. && \text{(由定义 5.7)} \end{aligned}$$

由数学归纳法，就证明了欲证结果。

引理 5.2 对于任意的自然数 m 和 n，我们有

$$m^+ + n = m + n^+$$

成立

证明 对于任意的自然数 m 和 n，我们有

$$m^+ + n = (m + n)^+ \qquad \text{(由引理 5.1)}$$

$$= m + n^+. \qquad \text{(由定义 5.7)}$$

这就完成了欲证结果.

定理 5.6 对于任意的自然数 m 和 n，我们有

$$m + n = n + m.$$

证明 实际上,我们要证明的是这样的一个命题

$$\forall m \forall n (m + n = n + m) \qquad (5.5)$$

成立. 为此我们令 $P_1(m) := \forall n(m + n = n + m)$，这时有

$$P_1(0) = \forall n(0 + n = n + 0),$$

并且令 $P_2(n) := 0 + n = n + 0$，

显然 $P_2(0)$ 成立.

现在，假定对于任一自然数 K，我们有 $P_2(K)$ 成立. 即

$$0 + K = K + 0 \qquad (5.6)$$

成立. 我们来证明 $P_2(K^+)$ 成立;因为

$$\begin{aligned} 0 + K^+ &= (0 + K)^+ \\ &= (K + 0)^+ && \text{(由 (5.6) 式)} \\ &= K^+ \\ &= K^+ + 0. && \text{(由定义 5.7)} \end{aligned}$$

所以，$P_2(K^+)$ 成立. 这样，由数学归纳法，就有 $\forall n P_2(m)$ 成立. 即 $P_1(0)$ 成立. 现在我们假定对于任意的自然数 K，都有 $P_1(K)$ 成立，即对于所有的 n，都有

$$K + n = n + K \qquad (5.7)$$

成立. 现在来证明 $P_1(K^+)$ 成立. 因为

$$\begin{aligned} K^+ + n &= K + n^+ && \text{(由引理 5.2)} \\ &= (K + n)^+ && \text{(由定义 5.7)} \end{aligned}$$

$$= (n + K)^+ \qquad \text{(由 (5.7) 式)}$$

$$= n + K^+. \qquad \text{(由定义 5.7)}$$

所以，$P_1(K^+)$ 成立．由数学归纳法，就有 (5.5) 式成立．这就证明了欲证的结果．

定理 5.7 对于任意的自然数 m，n 和 K，都有：

(1) $m + (n + K) = (m + n) + K$，

(2) $m + n = m + K \leftrightarrow n = K$，

(3) $m + n < m + K \leftrightarrow n < K$，

(4) $m < n \leftrightarrow m + K < n + K$．

我们把这一定理的证明留给读者．

引理 5.3 对于任意的自然数 m 和 n，都有

$$m^+ \cdot n = m \cdot n + n$$

成立．

证明 施归纳于自然数 n，我们验证 $n = 0$ 时，引理成立．因为由定义 5.8，$m^+ \cdot 0 = 0$，并且 $m \cdot 0 + 0 = 0 + 0 = 0$．所以，我们有

$$m^+ \cdot 0 = m \cdot 0 + 0$$

成立．现在假定对任一自然数 K，我们有

$$m^+ \cdot K = m \cdot K + K \tag{5.8}$$

成立．我们来证明

$$m^+ \cdot K^+ = m \cdot K^+ + K^+ \tag{5.9}$$

成立．这是因为

$$m^+ \cdot K^+ = m^+ \cdot K + m^+ \qquad \text{(由定义 5.8)}$$

$$= m \cdot K + K + (m + 1) \qquad \text{(由 (5.8) 式)}$$

$$= (m \cdot K + K + m) + 1 \quad (\text{由定理 5.7(1)})$$
$$= (m \cdot K + m + K) + 1 \quad (\text{由定理 5.6})$$
$$= (m \cdot K + m) + (K + 1) \quad (\text{由定理 5.7(1)})$$
$$= m \cdot K^+ + K^+. \quad (\text{由定义 5.8})$$

所以，有(5.9)式成立．由归纳法，我们获得了欲证结果．

定理 5.8 对于任意的自然数 m 与 n，我们有

$$m \cdot n = n \cdot m$$

成立．

证明 事实上，我们要证明的是下述命题

$$\forall m \forall n (m \cdot n = n \cdot m) \tag{5.10}$$

成立．为此，我们令

$$P_1(m) := \forall n (m \cdot n = n \cdot m), \tag{5.11}$$

这时，我们有

$$P_1(0) = \forall n (0 \cdot n = n \cdot 0). \tag{5.12}$$

这时，我们令 $P_2(n) = 0 \cdot n = n \cdot 0$．

显然 $P_2(0)$ 成立．

现在，假定对于任一自然数 K，我们有 $P_2(K)$ 成立，即

$$0 \cdot K = K \cdot 0 \tag{5.13}$$

成立．我们来证明 $P_2(K^+)$ 成立．因为

$$0 \cdot K^+ = 0 \cdot K + 0 = K \cdot 0 + 0 = K^+ \cdot 0.$$

所以，$P_2(K^+)$ 成立．这样，由数学归纳法，就有 $\forall n P_2(n)$ 成立．即 $P_1(0)$ 成立．现在，我们假定，对于任意的自然数 K，我们有 $P_1(K)$ 成立．即对所有的 n，都有

$$K \cdot n = n \cdot K \tag{5.14}$$

成立．现在来证明 $P_1(K^+)$ 成立．因为

$$K^+ \cdot n = K \cdot n + n \qquad \text{(由引理 5.3)}$$
$$= n \cdot K + n \qquad \text{(由 (5.14) 式)}$$
$$= n \cdot K^+. \qquad \text{(由定义 5.8)}$$

所以，$P_1(K^+)$ 成立，由数学归纳法，就有定理 5.8 成立．

定理 5.9 对于任意的自然 m, n 和 K, 我们有

(1) $n \cdot (m \cdot K) = (n \cdot m) \cdot K$,

(2) $m \cdot (n + K) = m \cdot n + m \cdot K$,

(3) $m \cdot n < m \cdot K \leftrightarrow (n < K \wedge m \neq 0)$,

(4) $m \cdot n = m \cdot K \rightarrow (m = 0 \vee n = K)$,

(5) $m \neq 0 \wedge n < K \rightarrow m \cdot n < m \cdot K$.

这一定理的证明留给读者自己进行．

定理 5.10 对于任意的自然数 m 和 n, $0 < n$, 我们有唯一的自然数 K 和唯一的自然数 $i < n$, 使得

$$m = n \cdot K + i \qquad (5.15)$$

成立．

证明 首先假定 $n \neq 0$（即 $0 < n$）成立，然后我们施归纳于 m，当 $m = 0$ 时，这时令 $K = 0$, $i = 0$, (5.15) 式显然成立，并且 K, i 是唯一的． 现在假定对于任意自然数 m，我们有唯一的自然数 K_1 和 i_1, $i_1 < n$, 有

$$m = n \cdot K_1 + i_1 \qquad (5.16)$$

成立．现在证明对于 m^+, 也有唯一的自然数 K_2 和 i_2, $i_2 < n$, 使得

$$m^+ = n \cdot K_2 + i_2 \qquad (5.17)$$

成立．因为(5.16)成立，并且 $i_1 < n$，所以就有 $i_1 + 1 < n$ 或 $i_1 + 1 = n$ 成立．

当 $i_1 + 1 < n$ 时，我们令 $K_2 = K_1$，$i_2 = i_1 + 1$，此时，显然(5.17)式成立．此时 K_2，i_2 的取法是唯一的．

当 $i_1 + 1 = n$ 时，我们令 $K_2 = K_1 + 1$，$i_2 = 0$，此时，显然也有(5.17)式成立，并且此时 K_2，i_2 的取法也是唯一的．

综上，由数学归纳法，我们已完成了欲证结果．

习　　题

1．证明：对于任一自然数 n，$n^+ \neq 0$．

2．证明：对于任意的自然数 m，n，都有

$$m^+ = n^+ \to m = n.$$

3．证明：$1 \neq 3$，即 $\varnothing^+ \neq \varnothing^{+++}$．

4．证明：$2 \neq 3$，即 $\varnothing^{++} \neq \varnothing^{+++}$．

5．判断：$\{3, 4, 6\}$ 是否传递的．

6．判断：$\{0, 1, \{1\}\}$ 是否传递的．

7．判断：$\{0, 1, \{1\}\}$ 是否有三岐性．

8．判断：$\{3, 4, 6\}$ 是否有三岐性．

9．判断：ω^+ 是否传递的．

10．判断：ω^+ 是否有三岐性．

11．证明定理 5.7(1)．

12．证明定理 5.7(2)．

13．证明定理 5.7(3)．

14．证明定理 5.7(4)．

15．证明定理 5.9(1)．

16．证明定理 5.9(2)．

17．证明定理 5.9(3)

18．证明定理 5.9(4)．

19．证明定理 5.9(5)．

第六章 幂 集 合

本章首先讨论由任一集合的所有子集合所形成的集合：幂集合和幂集合存在公理，进而讨论幂集合的几个性质.

§1 幂集合存在公理

在第一章中我们讨论了集合的子集合概念. 空集合是任一集合的一个子集合；任一集合 S 是它自身的一子集合. 这样，对于任一非空集合 S 而言，它至少有二个子集合，一个是空集合 $\varnothing$，另一是 S. 当 S 不空并且也不是一单元集合时，必定还有其它子集合.

例 1 集合 2 的子集合有 $\varnothing$, 1, $\{1\}$ 和 2，共有四个子集合.

例 2 集合 3 即 $\{0, 1, 2\}$ 有子集合：$\varnothing$, 1, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$, 3 共有八个子集合.

例 3 集合 $\{2, 3, 4\}$ 有子集合：$\varnothing$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$. 共有八个子集合.

定义 6.1 对于任意的集合 S，把 S 的所有子集合汇合到一起所形成的那个集合叫做 S 的幂集合，并记做 $P(S)$，或 PS.

例 4 $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$.

例 5 对于任意的一集合S, $P(\{S\})=\{\varnothing, \{S\}\}$.

例 6 $P(2)=\{\varnothing, 1, \{1\}, 2\}$.

例 7 $P(3)=\{\varnothing, 1, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, 3\}$.

例 8 $P(\{2, 3, 4\})=\{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$.

上述例子说明，对于如上给定的集合来说，它的所有子集合都可以汇合成一个新的集合．然而，是否对一切集合 S 而言，都有它的幂集合存在呢？这需要由公理给以保证，为此，我们引进一条新的公理．

幂集合存在公理 对于任意给定的集合 S, 由它的所有子集合组成的集合，即 S 的幂集合 $P(S)$ 是存在的．

由上所述，对于任意的集合 S 和 u, 我们都有:

$$u\in P(S)\longleftrightarrow(u\subset S) \tag{6.1}$$

成立．也就是说，对于任意集合 S 而言，

$$P(S):=\{u|u\subset S\}.$$

§ 2 有穷集合的幂集合

首先，我们重申有穷集合的概念，这一概念对于本节来说是很重要的．

定义 6.2 一集合 S 如果有一个自然数 n, 使得 S 恰好有 n 个元素．则集合 S 叫做有穷的．

定理 6.1　若 S 为一有穷集合，$a\notin S$，并且令

$$S_1:=S\cup\{a\},$$

则 S_1 的子集合的数目恰好是 S 的子集合数目的二倍.

证明　对于 S 的每一个子集合，都能够附加上或不附加上元素 a 而形成 S_1 的一子集合.由这一过程可以获得 S_1 的所有子集合. 这是因为对于 S 的每一子集合 S_2，都有 $S_2\subset S_1$ 且 $S_2\cup\{a\}\subset S_1$ 成立. 反之，对于任一集合 $S_2\subset S_1$. 若 S_2 中不含有 a，则 $S_2\subset S$，且也有 $\{a\}\cup S_2\subset S_1$，若 $a\in S_2$，则 S_2 中去掉元 a，其它元素都一定是 S 的元素. 所以 $S_2\dot{-}\{a\}\subset S$. 由此，就证明了 S_1 的子集合的数目恰为 S 的数目的二倍.

定理 6.2　对于所有的自然数 n，如果 S 恰有 n 个元素，则 $P(S)$ 就恰有 2^n 个元素.

证明　用数学归纳法来证明这一定理，也就是说，对于 S 的元素的数目作归纳. 对于每一自然数 n，令 $A(n)$ 为这样的一个命题：对于所有的集合 S，若 S 恰有 n 个元素，则 $P(S)$ 恰有 2^n 个元素.

对于命题 $A(n)$ 而言，我们恰须证明下述二点：

(1) $A(0)$ 显然成立. 因为只有空集合 S 为 0 个元素，而 $2^0=1$ 即 $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$，故 $P(\varnothing)$ 恰有一元素.

(2) 对于任意的自然数 n，如果 $A(n)$ 成立，那么须推演出 $A(n+1)$ 成立. 因为，由假定 S 有 n 个元素，且 $P(S)$ 有 2^n 个元素. 在此假定下，令 $S_1:=S\cup\{a\}$，$a\notin S$，即S_1 恰有 $n+1$ 个元素. 由定理 6.1，S_1 的子集合的数目恰为 S 的子集合数目的 2 倍，即 S_1 的数目为 $2\cdot 2^n$. 因为 $2^{n+1}=2\cdot 2^n$，

故 $P(S_1)$ 的元素的数目恰为 2^{n+1}. 这就完成了(2)的证明.

由数学归纳法,这就完成了定理 6.2 的证明.

由定理 6.2 可知: $P(4)$ 的元素的数目为16, $P(5)$ 的元素的数目为 32, $P(6)$ 的元素的数目为 64, $P(7)$ 的元素的数目为 128, $P(8)$ 的元素的数目为 256, $P(9)$ 的元素的数目为 512, $P(10)$ 的元素的数目为 1024. 这个数目的增长速度是很惊人的.

如何直观地表示出任一有穷集合 S 的幂集合呢? 这不仅便于理解和掌握幂集合的概念, 而且便于掌握集合代数的运算和性质. 现在我们介绍两种表述方法.

幂集合的图形表示法

让我们先列举三个例子.

例 1 用图形表示 $P(2)$, 它的元素有 $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, 2. 我们用图 1 表示它, 两元素之间的连线表示它们之间包含关系 $\subset$ 成立, 并且下边的元素包含在上边的元素之中. 例如

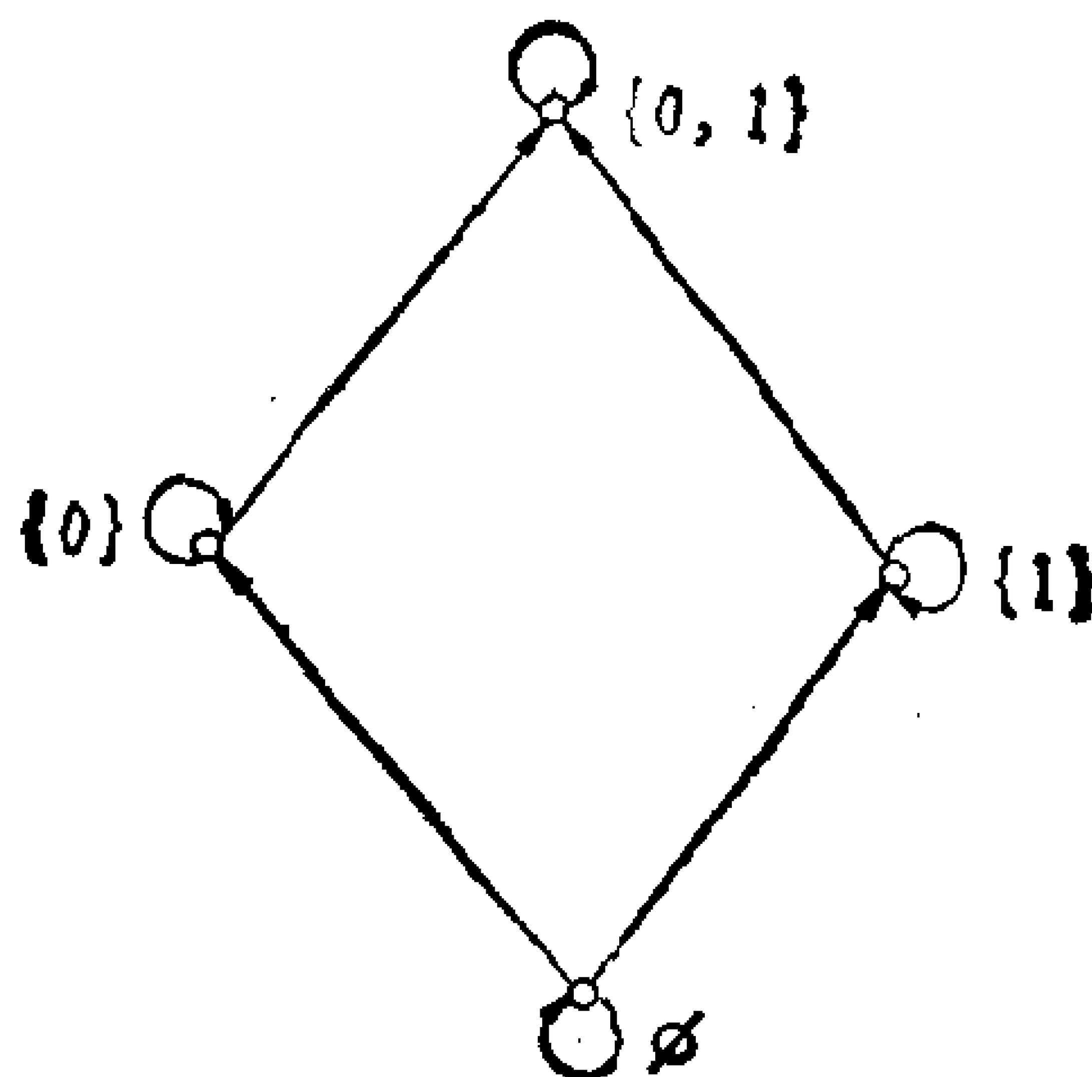


图 1 $P(2)$ 的示意图

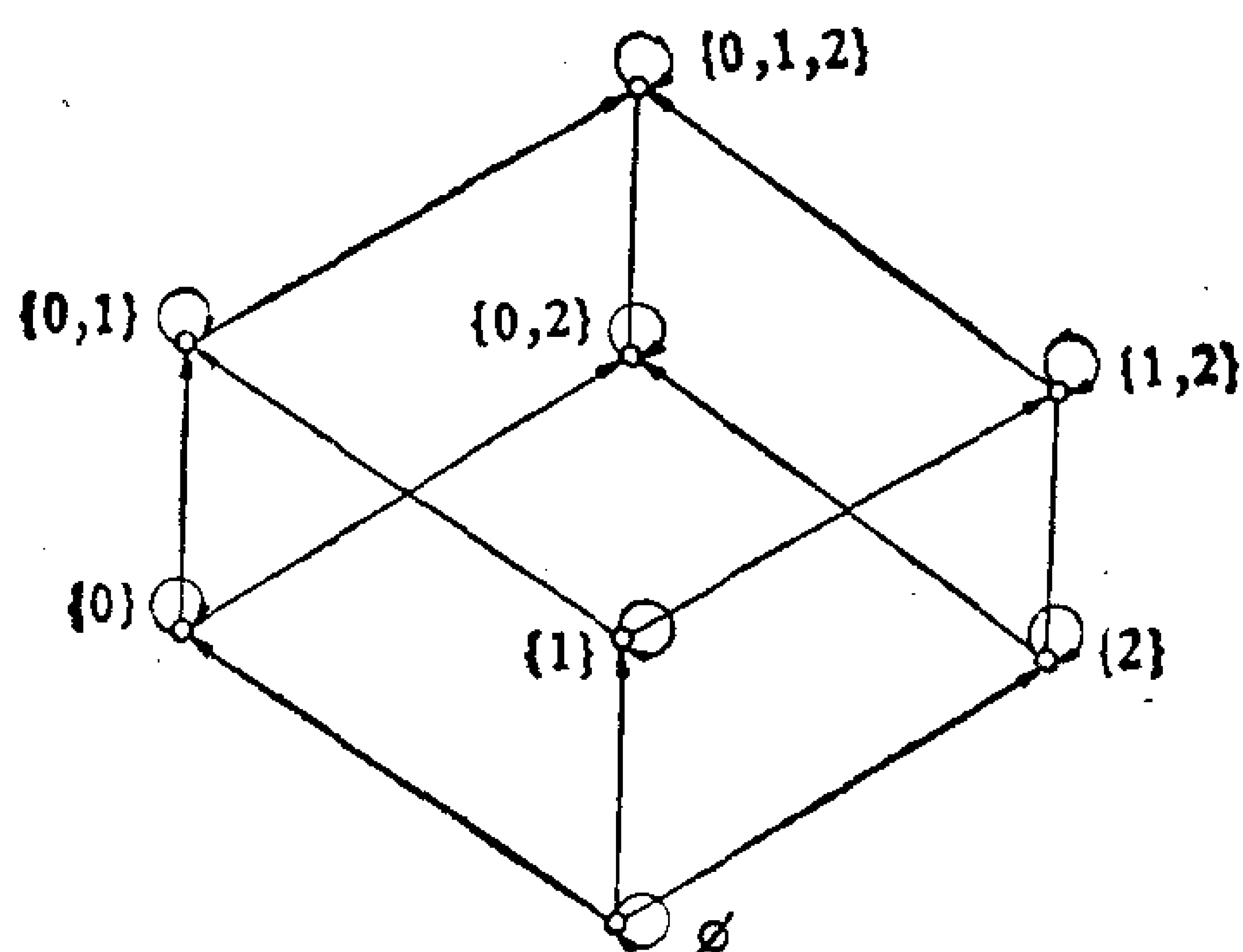


图 2　P(3) 的示意图

$\varnothing \subset \{0\}$, $\varnothing \subset \{1\}$, $\varnothing \subset 2$, $\{0\} \subset 2$, $\{1\} \subset 2$ 等等.

例 2　用图形表示 $P(3)$, 它的元素为 $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$, 并且它们之间的包含关系如图 2.

例 3　用图形表示 $P(4)$, 它的元素为 $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{0, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$ 和 $\{0, 1, 2, 3\}$, 并且它们之间的包含关系如图 3 (为了图形的简便, 省略自包含的连线).

由上述例子不难看出, 任意给定一有穷集合 S, 不妨假定 S 有 n 个元素, n 为一自然数. 图形的最底层(我们称之为第 0 层)总是空集合, 第 1 层是 S 的各个元素所形成的单元集合(即 S 中任取一个元素的各个组合), 以此类推, 对于任意自然数 K, $K \leqslant n$, 第 K 层就是 S 中任取 K 个元素的所有组合. 并且在第 K 层到第 $K+1$ 层之间有包含点的就连上线段. 这

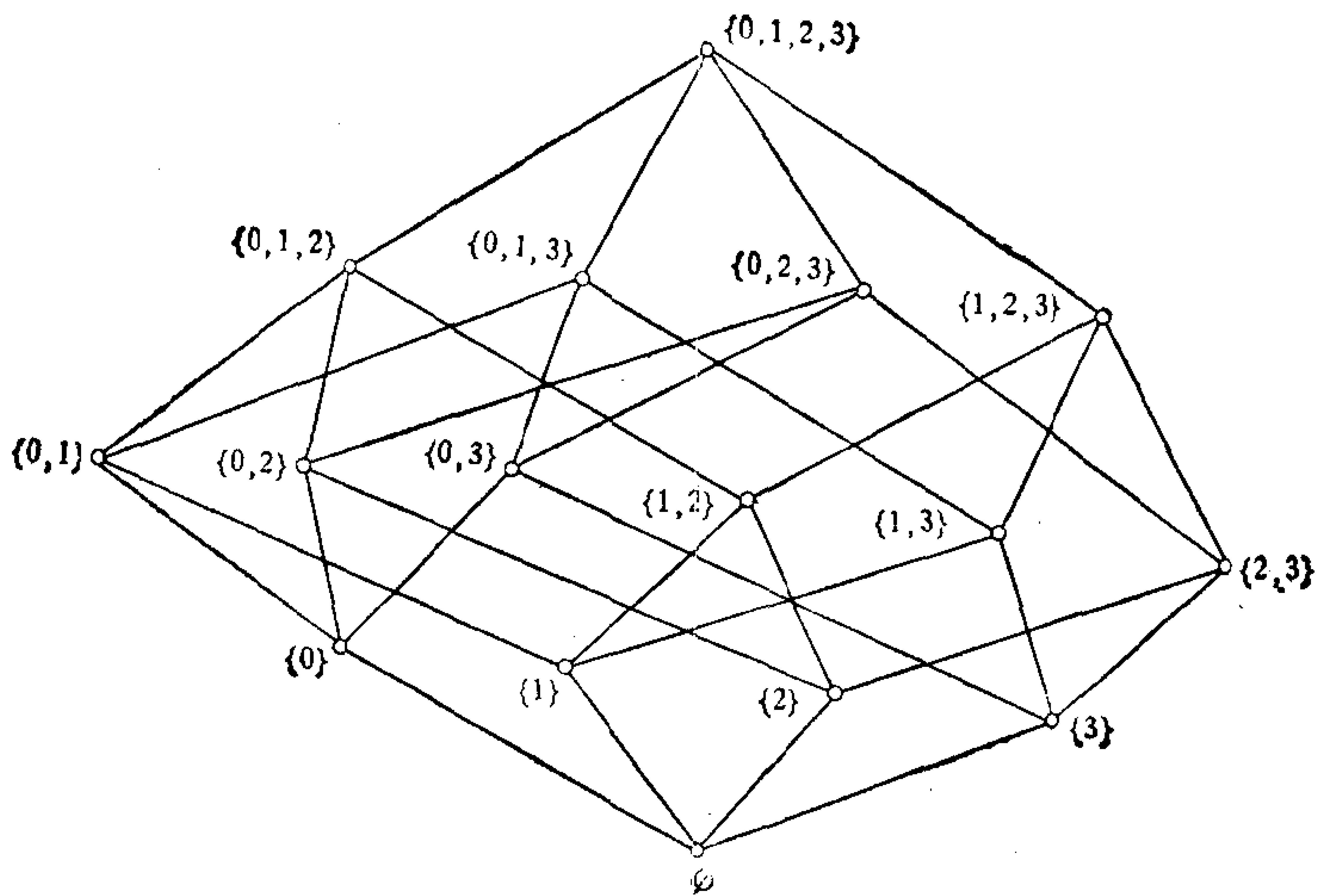


图 3　$P(4)$ 的示意图

样，在有穷步骤内就可以做出我们的图形来．并且凡有直接或间接连线的二个集合都有包含关系，低层的集合包含在高层的集合之中． 同层的二个不同的集合之间没有包含关系．图形中每一个点都是 $P(S)$ 的一个元素． 反之，$P(S)$ 的任一元素也都是相应图形中的一个点．

幂集合的树形表示法

这种表示法是从枚举集合 S（假定 S 恰有 n 个元素)的元素着手，然后逐步作出它的子集合，每一子集合对应于相应二值树上一枝．这种步骤也是一个机械过程．反之，从 S 出发我们可直接做出一 n 层的二值树，使得该树的每一枝都恰好对应于 $P(S)$ 的一子集合．为了弄清这一过程，先看下面三个

例子.

例4 $S=\{a, b\}$, $a\neq b$. 我们做表1，使得a与b之下的二进制数0 0表示空集合，即a，b都不属于此集合. 数0 1表示单元集合$\{b\}$，因a之下为0，故a不属于此集合，b之下为1，故b属于它. 二进制数 1 0 表示集合$\{a\}$，因为a之下的数为1，故a属于此集合，b之下为0，故b不属于它. 二进制数 1 1 表示集合$\{a, b\}$，即S，因为a，b之下都是1，故a，b都属于此集合. 另一方面这四个数可以用一棵二层的丰满二值(枝)树表示出来. 如图4所示，这一树有一个根（A点），引出两个叉，每一叉上在节点处又分出两个叉，向右的叉的节点上标以0，向左的标以1，以此类推. 这样，

表 1

a	b	$P(S)$
0	0	$\varnothing$
0	1	$\{b\}$
1	0	$\{a\}$
1	1	$\{a, b\}$

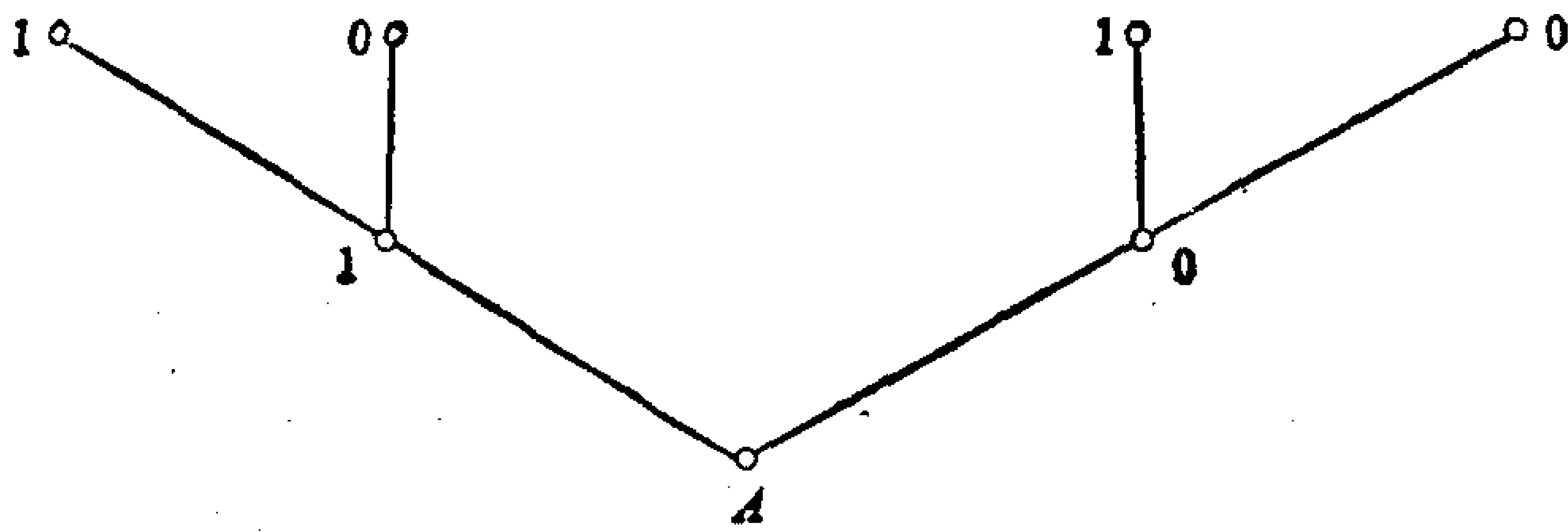


图4 一棵2层丰满的二值树

我们就获得一棵 2 层的二值树，所得的二进制数 0 0，0 1，1 0 和 1 1 分别表示 $P(S)$ 的元素 $\varnothing$，$\{b\}$，$\{a\}$，$\{a, b\}$.

例 5 令 $S=\{a, b, c\}$，其中 a, b, c 互不相同. 首先做表 2，然后类似于例 1，做图 5，这树的每一枝（从根部到树叶）代表一个二进制数，从而表示 $P(S)$ 的一元素，所有的枝（一共有 8 个枝）表示 $P(S)$ 的所有元素.

表 2

a	b	c	$P(S)$
0	0	0	$\varnothing$
0	0	1	$\{c\}$
0	1	0	$\{b\}$
0	1	1	$\{b, c\}$
1	0	0	$\{a\}$
1	0	1	$\{a, c\}$
1	1	0	$\{a, b\}$
1	1	1	$\{a, b, c\}$

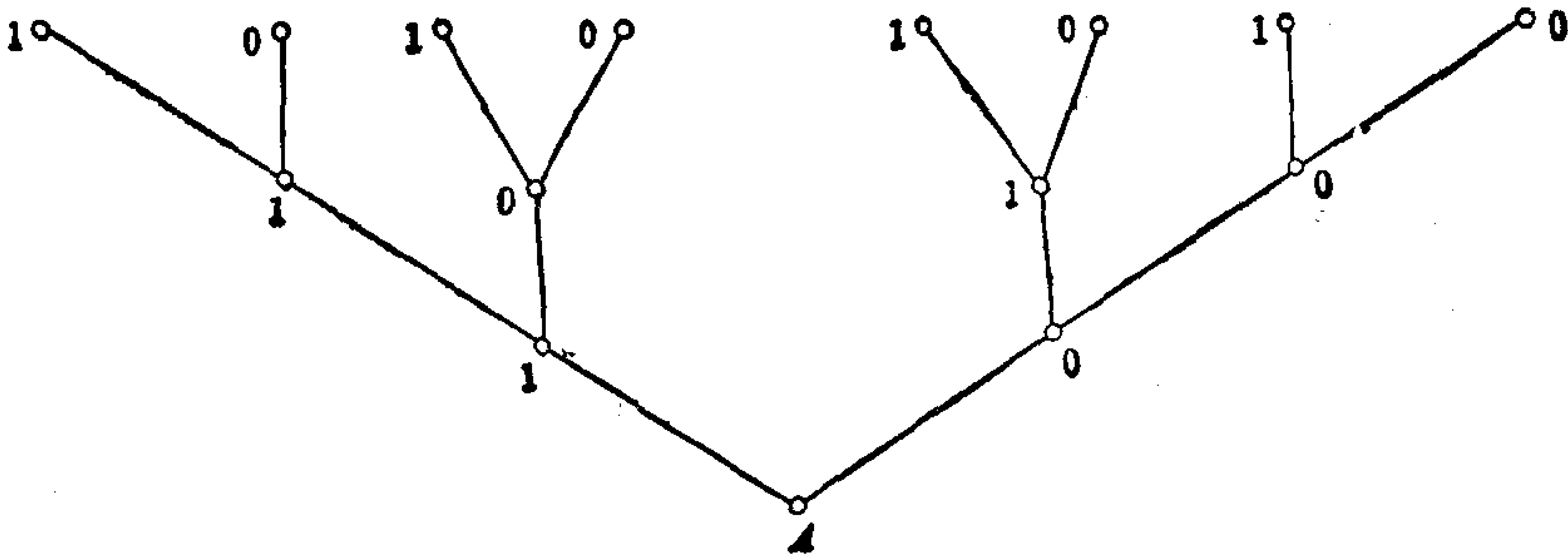


图 5 一棵 3 层丰满的二值树

例 6 令 $S=\{a, b, c, d\}$，其中 a, b, c, d 互不相同.

我们直接做一棵4层丰满的二值树（如图6）．这一树中每一枝恰好表示 $P(S)$ 的一个元素．例如，从右向左，第一枝表示空集合 $\varnothing$，第二枝表示单元集合 $\{d\}$，第三枝表示单元集合 $\{c\}$，第四枝表示集合 $\{c, d\}$，而第十枝表示集合 $\{a,d\}$，等等．

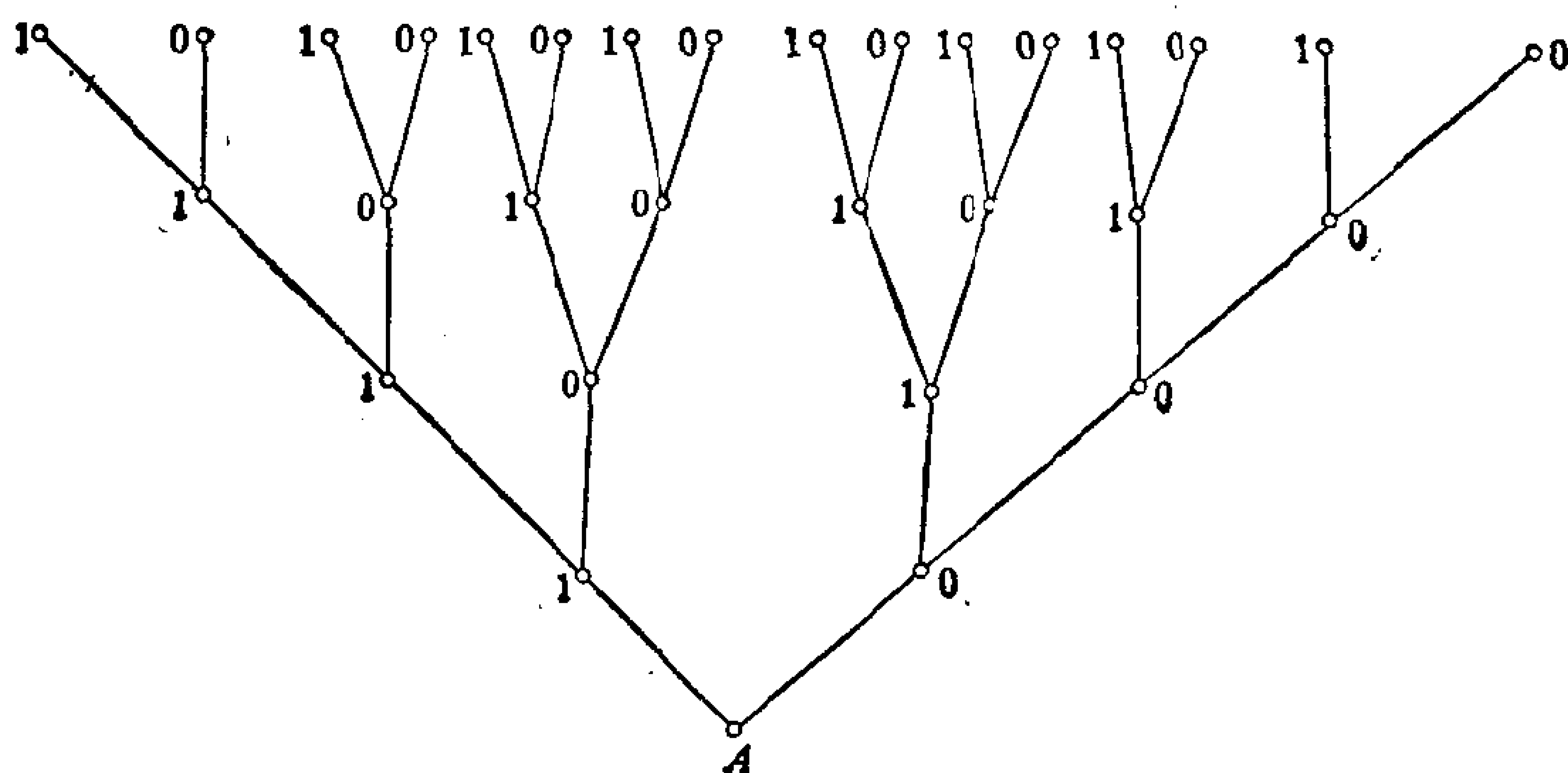


图6　一棵4层丰满的二值树

由上述三个例子不难看出，任给一个具有 n 个不同元素的集合 S，不失一般性，取自然数 n 把 S 的元素给以编号（因为 S 为一有穷集合，它恰有 n 个元素，这样做是允许的），然后做一 n 层丰满二值树，这一树的每一枝就恰好表示 $P(S)$ 的一个元素．这一树的所有枝就表示了集合 $P(S)$ 的所有元素，从而也就表达了 $P(S)$．不难看出，这种表示仅与 S 的元素个数，自然数 n 有关，而与 S 的元素是什么并没有直接关系．因此，我们可设想对于每一自然数 n，我们早已做出了 n 层丰满二值树，由树的枝与 S 的元素的编号就直接获得了 S 的所有子集合，从而也就获得了集合 $P(S)$． 由此还可获得定理6.2的又一证明方法．

§3 幂集合的初等性质

定理 6.3 对于任意的集合 S_1，S_2，我们有：

(1) $S_1 \subset S_2 \to P(S_1) \subset P(S_2)$，

(2) $P(S_1) \subset P(S_2) \to S_1 \subset S_2$，

(3) $P(S_1) = P(S_2) \leftrightarrow S_1 = S_2$.

证明 先证 (1) 假定 $S_1 \subset S_2$ 成立，并且对于任意的集合 S，我们有：

$$
\begin{aligned}
S \in P(S_1) &\to S \subset S_1 && (\text{由(6.1)式})\\
&\to S \subset S_2 && (\text{由 } S_1 \subset S_2 \text{ 和} \subset \text{传递性})\\
&\to S \in P(S_2). && (\text{由(6.1)式})
\end{aligned}
$$

由于 S 的任意性，有 $S_1 \subset S_2 \to P(S_1) \subset P(S_2)$.

(2) 假定 $P(S_1) \subset P(S_2)$ 成立，并且对于任意的集合 S，我们有：

$$
\begin{aligned}
S \in S_1 &\to \{S\} \subset S_1 && (\text{由单元集合的定义})\\
&\to \{S\} \in P\{S_1\} && (\text{由(6.1)式})\\
&\to \{S\} \in P(S_2) && (\text{由前提 } P(S_1) \subset P(S_2))\\
&\to \{S\} \subset S_2 && (\text{由(6.1)式})\\
&\to S \in S_2, && (\text{由单元集合的定义})
\end{aligned}
$$

∴ $S \in S_1 \to S \in S_2$ 由 S 的任意性，即得到 $S_1 \subset S_2$，

∴ $P(S_1) \subset P(S_2)) \to S_1 \subset S_2$.

(3) 先证 $P(S_1) = P(S_2) \to S_1 = S_2$.

已知 $P(S_1) = P(S_2)$，即有 $P(S_1) \subset P(S_2)$ 且 $P(S_2) \subset$

$P(S_1)$. 由(2),即得到 $S_1 \subset S_2$ 且 $S_2 \subset S_1$，由外延公理，就有 $S_1 = S_2$.

再证 $S_1 = S_2 \to P(S_1) = P(S_2)$.

已知 $S_1 = S_2$，即有 $S_1 \subset S_2$ 且 $S_2 \subset S_1$，使用(1). 即可得到 $P(S_1) \subset P(S_2)$ 且 $P(S_2) \subset P(S_1)$ 由外延公理,即得

$$P(S_1) = P(S_2).$$

由上述两个步骤,我们即得到(3).

定理 6.4 对于任意的集合 S_1, S_2, 我们有:

$$P(S_1) \in P(S_2) \to S_1 \in S_2.$$

证明

$$\begin{aligned} P(S_1) \in P(S_2) &\to P(S_1) \subset S_2 \\ &\to S_1 \in P(S_1) \wedge P(S_1) \subset S_2 \\ &\to S \in S_2. \end{aligned}$$

由上述推演和"⟶"的传递性,我们就证明了欲证结果.

注 1 定理 6.4 的逆是不成立的. 例如,令

$$S_1 := 2, \quad S_2 := \{2\}.$$

显然有 $S_1 \in S_2$. 然而

$$P(S_1) = P(2) = \{\varnothing, 1, \{1\}, 2\}.$$

$$P(S_2) = P(\{2\}) = \{\varnothing, \{2\}\}.$$

显然 $P(S_1) \notin P(S_2)$.

定理 6.5 对于任意的集合 S_1 与 S_2, 我们有:

(1) $P(S_1) \cap P(S_2) = P(S_1 \cap S_2)$,

(2) $P(S_1) \cup P(S_2) \subset P(S_1 \cup S_2)$.

证明 先证(1),对于任意的集合 S, 我们有:

$$S \in P(S_1) \cap P(S_2) \leftrightarrow S \in P(S_1) \wedge S \in P(S_2)$$
$$\leftrightarrow S \subset S_1 \wedge S \subset S_2$$
$$\leftrightarrow S \subset S_1 \cap S_2$$
$$\leftrightarrow S \in P(S_1 \cap S_2),$$

∴ 由外延公理即得到(1)的结果.

再证(2),对于任意的集合 S, 我们有:

$$S \in P(S_1) \cup P(S_2) \rightarrow S \in P(S_1) \vee S \in P(S_2)$$
$$\rightarrow S \subset S_1 \vee S \subset S_2$$
$$\rightarrow S \subset S_1 \cup S_2$$
$$\rightarrow S \in P(S_1 \cup S_2),$$

∴ 有 $S \in P(S_1) \cup P(S_2) \rightarrow S \in P(S_1 \cup S_2)$.

由 S 的任意性,即获得(2)的结论.

注 2 定理 6.5(2) 的包含式不能换成等式, 这主要是我们不能由 $S \subset S_1 \cup S_2$ 获得 $S \subset S_1 \vee S \subset S_2$. 因而双蕴涵推演式不能成立.

例如 令 $S := \{1, 2, 3\}$, $S_1 := \{1, 2\}$, $S_2 := \{3, 4\}$, 显然有 $S \subset S_1 \cup S_2$, 但却没有 $S \subset S_1$ 或 $S \subset S_2$ 成立.

我们知道,空集合 $\varnothing$ 是任一集合 S 的子集合, 因此, 对于任一集合 S 来讲,总有 $\varnothing \in P(S)$.

两个集合的相对补集合的幂集合与这两个集合的幂集合的相对补是什么关系呢? 我们来回答这一问题.

定理 6.6 对于任意的集合 S_1 与 S_2, 都有

$$P(S_1 \dot{-} S) \subset (P(S_1) \dot{-} P(S_2)) \cup \{\varnothing\}.$$

证明 因为对于任意的不空集合 S, 我们有:

$$S\in P(S_1 \dot{-} S_2)\to S\subset S_1 \dot{-} S_2\to S\subset S_1\wedge S\not\subset S_2$$
$$\to S\in P(S_1)\wedge S\notin P(S_2)$$
$$\to S\in P(S_1)\dot{-} P(S_2).$$

由此,就获得了欲证结果.

注3 上述证明中,当 S 为空集合时,由 $S\subset S_1 \dot{-} S_2$ 不能推演出 $S\subset S_1\wedge S\not\subset S_2$, 事实上, 总有 $\varnothing\subset S_2$, 所以,空集合总是要特别指出的. 因为 $\varnothing\in P(S_1 \dot{-} S_2)$. 然而

$$\varnothing\notin P(S_1)\dot{-} P(S_2).$$

§4 幂集合与传递集合

在第五章中,我们曾引进了传递集合的概念,它们是一类很重要的集合.

定理 6.7 对于任意的集合 S, 如果 S 是传递的,则有:

$$S\subset P(S).$$

证明 对于任意的集合 S_2, 若 $S_2\in S$, 这时, 由 S 是传递集合,可知对任意集合 S_1, 若 $S_1\in S_2$, 则有 $S_1\in S$. 所以,我们有 $S_2\subset S$, 由此, $S_2\in P(S)$. 所以,我们有 $S\subset P(S)$.

定理 6.8 设 S 为任意的集合,并且满足 $S\subset P(S)$, 那么 S 是传递集合.

证明 因为,对于任意的集合 S_1, S_2, 我们有:

$$S_1\in S_2\wedge S_2\in S\to S_1\in S_2\wedge S_2\in P(S)$$
$$\to S_1\in S_2\wedge S_2\subset S$$
$$\to S_1\in S.$$

因此，$S_1 \in S_2 \wedge S_2 \in S \to S_1 \in S$. 即 S 是一传递集合.

由上述两个定理，我们立即获得了传递集合的一个等价的定义.

推论 6.1 一集合 S 是传递的，当且仅当总有 $S \subset P(S)$ 成立.

一传递集合 S 的元素的元素也是 S 的元素. 一传递集合的幂集合是否还是传递的呢? 下边的定理作了肯定性的回答.

定理 6.9 若 S 是任一传递集合，则 $P(S)$ 也是一传递集合.

证明 因为对于任意的集合 S_1, S_2, 我们有:

$$
\begin{aligned}
S_1 \in S_2 \wedge S_2 \in P(S) &\to S_1 \in S_2 \wedge S_2 \subset S \\
&\to S_1 \in S \\
&\to S_1 \subset S \qquad \text{(因为 } S \text{ 传递)} \\
&\to S_1 \in P(S).
\end{aligned}
$$

所以，$P(S)$ 是传递的.

当 $P(S)$ 是传递集合时，S 是否传递的呢? 也就是说，我们已知一传递集合又是另一集合的幂集合，那么该集合是否也是传递集合呢? 下边的定理作了肯定性的回答.

定理 6.10 若 S 为任一集合，并且 $P(S)$ 是传递的，则 S 也是一传递的.

证明 因为对于任意的集合 S_1, S_2, 我们有:

$$
\begin{aligned}
S_1 \in S_2 \wedge S_2 \in S &\to S_1 \in S_2 \wedge \{S_2\} \subset S \\
&\to S_1 \in S_2 \wedge \{S_2\} \in P(S)
\end{aligned}
$$

$$\rightarrow S_1 \in S_2 \wedge S_2 \in \{S_2\} \wedge \{S_2\} \in P(S)$$

$$\rightarrow S_1 \in S_2 \wedge S_2 \in P(S)$$

$$\rightarrow S_1 \in S_2 \wedge S_2 \subset S$$

$$\rightarrow S_1 \in S.$$

由此，我们有：

$$S_1 \in S_2 \wedge S_2 \in S \rightarrow S_1 \in S.$$

∴ S 是传递的。

习　　题

1．试举出在定理 6.6 中把包含关系⊂换成等式不成立的反例。

2．给出 $P(5)$ 的树型表示法并求出 $P(5)$。

3．计算并化简：

$$\{P(\varnothing), P(P(\varnothing))\} \cup \{P(P(\varnothing)), P(P(P(\varnothing)))\}.$$

4．计算并化简：

$$\{\{P(P(P(\varnothing)))\}\} \cup \{\{P(P(\varnothing))\}\}.$$

5．计算并化简：

$$P(\{P(P(P(\varnothing))), \{P(P(\varnothing))\}\}).$$

6．计算并化简：

$$P(P(P(\varnothing)) \cap P(\varnothing)).$$

7．计算并化简：

$$P(P(P(\varnothing)) \cup P(\varnothing)).$$

8．计算并化简：

$$P(P(P(\varnothing))) \dot{-} P(P(\varnothing)).$$

第七章　集合的广义并与广义交

本章讨论集合的并的推广——广义并，集合的交的推广——广义交，并且讨论广义并与广义交的性质.

§1　集合的广义并

在第一章中我们引进了两个集合 S_1 与 S_2 的并，也就是把两个集合 S_1 与 S_2 的元素汇合到一起形成一个新的集合 $S_1 \cup S_2$. 据这一运算，还可以有三个集合的并，四个集合的并，甚至对于任意自然数 n 和任意集合 $S_0, S_1, \cdots, S_n$，我们都可有它们的并集合 $S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_n$. 也就是说，对于任意的有穷多个集合，我们都可以形成它们的并，但是，对于无穷多个集合能否形成它们的并集合呢？若能形成，是否还要附加其它条件呢？这是我们在本节中所要回答的问题.

对于任意给定两个集合 S_1 与 S_2，由无序对集合公理，我们可以令

$$S := \{S_1, S_2\}.$$

此时，我们求集合 S_1 与 S_2 的并 $S_1 \cup S_2$，也可以说是求把集合 S 的所有元素（亦即 S_1 与 S_2）的元素汇合到一起所形成的集合.

例如，当 $S_1=\{2,3\}$，$S_2=\{2,5,8,9\}$时，$S=\{\{2,3\},\{2,5,8,9\}\}$，这时 $S_1\cup S_2=\{2,3,5,8,9\}$，而把 S 的所有元素的元素汇合到一起所形成的集合也就是$\{2,3,5,8,9\}$.

对于任意给定的集合 $S_0, S_1, \cdots, S_n$，由无序对公理和两个集合的并，我们也可形成一集合 S

$$S := \{S_0, S_1, \cdots, S_n\}.$$

此时，我们求集合 $S_0, S_1, \cdots, S_n$ 的并

$$S_0\cup S_1\cup\cdots\cup S_n.$$

也可以说是求把集合 S 的所有元素（即 $S_0, S_1, \cdots, S_n$）的元素汇合到一起形成的集合.

这里，"把集合 S 的所有元素的元素汇合到一起"是否对于任意的集合 S 都能形成一集合呢？若都能形成一集合，我们如何表述这一集合呢？对这两个问题的肯定性的回答，也就确切地回答了本节开始所提出的问题. 对于许多具体的例子来讲，上述问题都是肯定无疑的. 但是仅从前边引进的集合论公理是不能达到这一点的. 也就是说，我们必须有新的公理. 这一新的公理我们称之为并集合公理，第一章引进的简单形式的并集合公理可以由这里的新公理和无序对集合存在公理而获得. 也就是说，简单形式的并集合公理仅是一定理.

并集合公理 对于任意的集合 S，都存在一集合 S_1，S_1 的元素恰好是由 S 的所有的元素的元素所组成.

由外延公理，上述集合 S_1 是唯一的，并记做 $\bigcup S$，称做 S

的并集合．换句话说．对于任意的集合 u，我们都有：

$u\in\bigcup S$ 当且仅当有一集合 x，$x\in S$ 并且 $u\in x$． (7.1)

也就是

$$u\in\bigcup S\longleftrightarrow\exists x(x\in S\wedge u\in x) \tag{7.2}$$

或者说

$$\bigcup S:=\{u|\exists x(x\in S\wedge u\in x)\} \tag{7.3}$$

并集合公理保证了对于任意的集合 S，“把集合 S 的元素的元素汇合到一起”能够形成一集合，它的表述方式就是用符号“$\bigcup S$”来表达这一集合． 这样，不管集合 S 是有穷的或无穷的，我们都能给出它的并集合 $\bigcup S$（亦即 S 的元素的元素的汇合），正如上述说明的那样，$\bigcup S$ 是简单并集合的推广．

注 1 在刻划并集合 $\bigcup S$ 时使用的量词是存在量词 $\exists$．我们是要把集合 S 的所有元素的元素汇合到一起，因此，一集合 u，若 $u\in\bigcup S$，则必须有一集合 x，$x\in S$ 使得 $u\in x$，反之，若一集合 x，使得 $x\in S$ 且 $u\in x$，则 $u\in\bigcup S$，也就是说，只要 u 是 S 的某一元素的元素，则 $u\in\bigcup S$，反之，若 $u\in\bigcup S$，则 u 必须是 S 的某一元素的一个元素，当然 u 也可能是 S 的某一些元素的公共元（甚至是 S 的所有元的公共元），但这不是我们的必要条件．只要求属某一个就够了．

由上述论证，显然下述定理成立．

定理 7.1 对于任意的集合 S_1 与 S_2，都有

$$S_1\cup S_2=\bigcup\{S_1,S_2\},$$

并且由 $S_1=S_2$ 时，有

$$S=\bigcup\{S\}.$$

这样，由并集合公理和无序对公理就推演出了简单并集合公理，也就是说，后者是我们的一个定理了.

特别地，我们有 $\bigcup\{\omega\}=\omega$.

定理 7.2 对于任意的集合 S_1 与 S_2，都有：

$$S_1\subset S_2\rightarrow\bigcup S_1\subset\bigcup S_2.$$

证明 假定 $S_1\subset S_2$，这时，对于任意的集合 u，我们有：

$$u\in\bigcup S_1\rightarrow u\in x\wedge x\in S_1 \quad (\text{由(7.1)式，有一集合 } x)$$

$$\rightarrow u\in x\wedge x\in S_2 \quad (\text{由 } S_1\subset S_2)$$

$$\rightarrow u\in\bigcup S_2. \quad (\text{由(7.1)式})$$

$\therefore$ $u\in\bigcup S_1\rightarrow u\in\bigcup S_2$ 即，$\bigcup S\subset\bigcup S_2$.

定理 7.3 对于集合的集合 S_1 与 S_2，都有

$$\bigcup(S_1\cup S_2)=\bigcup S_1\cup\bigcup S_2.$$

证明 假定 u 为任一集合，我们有

$$u\in\bigcup(S_1\cup S_2)\leftrightarrow u\in x\wedge x\in(S_1\cup S_2), \quad (\text{有一集合 } x)$$

$$\leftrightarrow u\in x\wedge(x\in S_1\vee x\in S_2)$$

$$\leftrightarrow(u\in x\wedge x\in S_1)\vee(u\in x\wedge x\in S_2)$$

$$\leftrightarrow u\in\bigcup S_1\vee u\in\bigcup S_2$$

$$\leftrightarrow u\in\bigcup S_1\cup\bigcup S_2.$$

由于 u 为任一集合，依据外延公理，即得欲证结果.

以后，我们将把 $\bigcup S$ 称做集合 S 的并，符号"$\bigcup$"称为并集合运算符号，而把 $S_1\cup S_2$ 仍然称为集合 S_1 与 S_2 的并，或称简单并.

定理 7.4 对于任意的集合 S，都有

$$\bigcup P(S)=S.$$

证明 对于任一集合 x，我们有

$$x \in \bigcup P(S) \leftrightarrow x \in u \wedge u \in P(S) \qquad (\text{有一集合 } u)$$

$$\leftrightarrow x \in u \wedge u \subset S \qquad (\text{有一集合 } u)$$

$$\leftrightarrow x \in S,$$

$\therefore\ \forall x(x \in \bigcup P(S) \leftrightarrow x \in S)$.

由外延公理，我们就有 $\bigcup P(S) = S$.

定理 7.4 说明$\bigcup$是幂的逆，也就是说，对于任一集合 S，先求 S 的幂集合 $P(S)$. 再求 $P(S)$ 的并，即获得 S. 我们知道，对于一集合 S 来说，它的幂集合的元恰好是 S 的子集合. 子集合比元素多一层花括号(多了一个层次)，例如，

$$S = \{a, b\}.\ P(S) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\},$$

$P(S)$ 的元素(除空集合$\varnothing$外)都比 S 的元素多了一层花括号. 即高了一个层次，而 $\bigcup P(S) = S$，$\bigcup P(S)$ 比 $P(S)$ 低了一个层次，少了一层花括号. 并且一般说，对于有穷集合 S 而言 $\bigcup S$ 都比 S 要低一个层次.

注 2 当 $S = \{\varnothing\}$时，$\bigcup S = \varnothing$，即，$\bigcup\{\varnothing\} = \varnothing$. 到了空集合，即到了层次最低（0 层的集合）就不能再低了，并且，由定义可知：$\bigcup\varnothing = \varnothing$.

§2 集合的广义交

对于任意给定的两个集合 S_1 与 S_2，由无序对集合公理，我们可以令

$$S := \{S_1, S_2\}.$$

此时，当我们求集合 S_1 与 S_2 的交集合 $S_1 \cap S_2$，即 S_1 与 S_2 的共同的元素组成的集合，我们也可以说这是把集合的所有元素（即 S_1 与 S_2）的公共元素汇合到一起所形成的集合，这时，我们也可以把上述求出的集合记做 $\bigcap S$。即我们有：

$$\bigcap S = S_1 \cap S_2.$$

若 S 为 $\{S_1, S_2, S_3\}$，显然有：

$$\bigcap S = S_1 \cap S_2 \cap S_3.$$

一般说，当 S 为一不空集合时，我们就可以考虑把集合 S 的所有元素的公共元素汇合到一起去形成一集合，当然，当 S 的所有元素没有公共元素时，这一汇合就是空集合. 为了确切地说明这一概念，我们引进下述定义.

定义 7.1 对于任意的不空集合 S，我们用 $\bigcap S$ 表示把 S 的所有元素的公共元素汇合到一起所形成的那个集合，记做 $\bigcap S$，并称做 S 的交集合.

对定义 7.1 的合法性，即对于任意不空集合 S 来说，$\bigcap S$ 的存在性问题，我们将在下一章中给出证明.

例 1 令 $S = \{\{3, 5\}, \{5, 8\}\}$，这时 $\bigcap S = \{5\}$.

例 2 $\bigcap \{S\} = S$.

例 3 $\bigcap \{\omega\} = \omega$.

注 3 在定义 7.1 中，我们强调集合 S 不空，这点是很重要的. 按照这一定义，对于任意的不空集合 S，我们都有一新的集合 $\bigcap S$，关于 S 不空这一条件，我们将在下一章加以说明. 另一方面，任一单元集合 $\{S\}$，我们已有

$$\bigcup \{S\} = \bigcap \{S\}$$

成立．虽然，对于一般情况来说，即对任一不空的集合 S，我们都有

$$\bigcap S \subset \bigcup S$$

成立．

由上所述，对于任意的不空集合 S，这时我们都有一集合 $\bigcap S$，使得对于任意的集合 u，都有

$u \in \bigcap S$ 当且仅当对于所有的集合 x，若 $x \in S$，则 $u \in x$．

换句话说，就是：

$$u \in \bigcap S \leftrightarrow \forall x(x \in S \rightarrow u \in x). \tag{7.4}$$

也就是：

$$\bigcap S := \{u \mid \forall x(x \in S \rightarrow u \in x)\}. \tag{7.5}$$

注 4 这里的量词是全称量词 $\forall$，它要求的是，$u \in \bigcap S$ 时，u 就必须属于 S 的所有元，也就是说，对于所有的集合 x，若 $x \in S$，则 $u \in x$．

定理 7.5 对于任意的不空集合 S_1 与 S_2，都有：

$$S_1 \subset S_2 \rightarrow \bigcap S_2 \subset \bigcap S_1.$$

证明 假定 $S_1 \subset S_2$，这时，对于任意的集合 u，我们有：

$$\begin{aligned} u \in \bigcap S_2 &\rightarrow (x \in S_2 \rightarrow u \in x) && (\text{任意集合 } x) \\ &\rightarrow (x \in S_1 \rightarrow u \in x) && (\text{由 } S_1 \subset S_2) \\ &\rightarrow u \in \bigcap S_1. \end{aligned}$$

这样，对于任意集合 u，都有

$$u \in \bigcap S_2 \rightarrow u \in \bigcap S_1.$$

所以，由$\subset$的定义，有 $\bigcap S_2 \subset \bigcup S_1$．

定理 7.6 对于任意的不空集合 S_1 与 S_2，都有：

$$\bigcap(S_1\bigcap S_2)=\bigcap S_1\cap\bigcap S_2.$$

证明 对于任意的集合 u，我们有

$$\begin{aligned}
u\in\bigcap(S_1\cup S_2) &\longleftrightarrow (x\in S_1\cup S_2\rightarrow u\in x) \qquad (\text{对任意 } x)\\
&\longleftrightarrow (x\in S_1\vee x\in S_2\rightarrow u\in x)\\
&\longleftrightarrow (x\in S_1\rightarrow u\in x)\wedge(x\in S_2\rightarrow u\in x)\\
&\longleftrightarrow u\in\bigcap S_1\wedge u\in\bigcap S_2\\
&\longleftrightarrow u\in\bigcap S_1\cap\bigcap S_2.
\end{aligned}$$

由外延公理，即得欲证结果.

在上述证明中使用了第二章给出的逻辑定律 *l.7*.

§3 对传递集合的封闭性

现在，我们来讨论广义并与广义交运算对于传递集合的封闭性.

定理 7.7 对于任意的集合 S，若 S 是传递的，则 $\bigcup S$ 也是传递的.

证明 设 x，y 为任意的对象，我们有

$$\begin{aligned}
x\in y\wedge y\in\bigcup S &\rightarrow x\in y\wedge z\in S\wedge y\in z \quad (\text{有一集合 } z)\\
&\rightarrow x\in y\wedge y\in S \qquad (\text{因为 } S \text{ 传递})\\
&\rightarrow x\in\bigcup S,
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$x\in y\wedge y\in\bigcup S\rightarrow x\in\bigcup S.$$

也就是说，$\bigcup S$ 是传递的.

定理 7.8 对于任意的不空集合 S，若 S 的每一元素都是

传递集合时，则 $\bigcap S$ 也是传递的。

证明 设 x, y 为任意的集合，我们有

$$
\begin{aligned}
x\in y\wedge y\in\bigcap S &\to x\in y\wedge(z\in S\to y\in z) \quad (\text{任一集合 } z)\\
&\to x\in y\wedge(z\notin S\vee y\in z)\\
&\to(x\in y\wedge z\notin S)\wedge(x\in y\wedge y\in z)\\
&\to(x\in y\wedge z\notin S)\vee x\in z \quad (z\text{ 的传递性})\\
&\to(x\in y\vee x\in z)\wedge(z\notin S\vee x\in z)\\
&\to(z\in S\to x\in z)\\
&\to x\in\bigcap S.
\end{aligned}
$$

在上述推演中，由 $x\in y\wedge y\in z$ 推得 $x\in z$ 时用到 z 是 S 的一元素．所以 z 是传递的．这样我们就获得了：

$$x\in y\wedge y\in\bigcap S\to x\in\bigcap S.$$

这就获得了我们的欲证结果．

上述二个定理的前提是有所不同的，定理 7.7 的条件是 S 是一传递集合．而定理 7.8 的前提条件是 S 的每一元都是传递的．现在我们把定理 7.7 的前提条件改为"S 的每一个元都传递"，是否仍有结果"$\bigcup S$ 传递"呢？另一方面，把定理 7.8 的前提条件改为"S 传递"是否仍有结论"$\bigcap S$ 传递"呢？我们现在来回答这两个问题．首先我们用下一定理断定第一个问题有肯定性答案的．

定理 7.9 对于任意的集合 S，若 S 的每一元都是传递的，则 $\bigcup S$ 是传递的．

证明 设 x, y 为任意的集合，我们有

$$x\in y\wedge y\in\bigcup S\to x\in y\wedge z\in S\wedge y\in z \quad (\text{有一集合 } z)$$

$$\rightarrow x \in z \wedge z \in S \qquad (z\text{ 传递})$$

$$\rightarrow x \in \bigcup S.$$

因此，我们有

$$x \in y \wedge y \in \bigcup S \rightarrow x \in \bigcup S.$$

也就是说，$\bigcup S$ 是传递的.

现在回答上述第二个问题，它的肯定性回答表现在下一定理及其推论中.

定理 7.10 对于任一不空的传递集合 S，都有 $\varnothing \in S$.

证明 假定定理不成立，即 $\varnothing \notin S$，这时，由正则公理，S 中有一极小元 y，即 $y \in S$ 且 $y \cap S = \varnothing$. 由假定，我们可知 $y \neq \varnothing$，这时由正则公理，必有一集合 z，使得 $z \in y$ 且 $z \cap y = \varnothing$. 然而由 $y \in S$，$z \in y$ 和 S 传递，得到 $z \in S$，这与 $y \cap S = \varnothing$ 相矛盾，由此，定理得证.

推论 7.1 若 S 是一非空的传递集合，则 $\bigcap S = \varnothing$，所以 $\bigcap S$ 是传递的.

证明 由定理 7.10，若 S 传递，总有 $\varnothing \in S$. 所以 $\bigcap S = \varnothing$.

*§4 有关广义并和广义交的某些定律

定理 7.11 对于任意的集合 S_1 与 S_2，我们有下述定律成立：

---

1) 带*的节，表示这节内容较难，初学者可略去.

(1) $S_1 \cup \bigcap S_2 = \bigcap\{S_1 \cup x \mid x \in S_2\}$ （其中 S_2 为一不空集合），

(2) $S_1 \cap \bigcup S_2 = \bigcup\{S_1 \cap x \mid x \in S_2\}$.

在证明之间，我们先就有关符号的使用给出一个简短的说明.

$$\{S_1 \cup x \mid x \in S_2\} := \{y \mid y := S_1 \cup x \text{ 且 } x \in S_2\},$$

$$\{S_1 \cap x \mid x \in S_2\} := \{y \mid y := S_1 \cap x \text{ 且 } x \in S_2\}.$$

这样定义出来的集合的写法比较直观，对于分配律的理解直观. 而等式 (1)、(2) 的右边实质上表现了广义交与广义并的推广.

因为 $\bigcap S = \bigcap\{x \mid x \in S\}$，($S$ 为非空集合)

$$t \in \bigcap S \longleftrightarrow \forall x(x \in S \to t \in x),$$

由此有，

$$t \in \bigcap\{S_1 \cup x \mid x \in S_2\} \longleftrightarrow \forall x(x \in S_2 \to t \in S_1 \cup x).$$

同样，

$$t \in \bigcup\{S_1 \cap x \mid x \in S_2\} \longleftrightarrow \exists x(x \in S_2 \wedge t \in S_1 \cap x).$$

这是因为：

$$\bigcup S = \bigcup\{x \mid x \in S\},$$

$$t \in \bigcup S \longleftrightarrow \exists x(x \in S \wedge t \in x).$$

不难看出，上述推广都是很自然的，下边我们给出上述定理的证明.

证明 先证公式(1)，对于任意集合 t，我们有：

$$t \in S_1 \cup \bigcap S_2 \longleftrightarrow t \in S_1 \vee t \in \bigcap S_2$$

$$\longleftrightarrow t \in S_1 \vee \forall x(x \in S_2 \to t \in x)$$

$$\leftrightarrow t \in S_1 \vee \forall x(x \notin S_2 \vee t \in x)$$

$$\leftrightarrow \forall x(t \in S_1 \vee x \notin S_2 \vee t \in x)$$

$$\leftrightarrow \forall x(x \notin S_2 \vee t \in S_1 \vee t \in x)$$

$$\leftrightarrow \forall x(x \in S_2 \rightarrow (t \in S_1 \vee t \in x))$$

$$\leftrightarrow \forall x(x \in S_2 \rightarrow (t \in S_1 \cup x))$$

$$\leftrightarrow t \in \bigcap\{S_1 \cup x \mid x \in S_2\}.$$

由于 t 的任意性和外延公理，我们就获得了欲证结果，请读者注意，在上述证明过程中用到了命题逻辑的规则 $l.3$ 和

$l.23$ $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ 为永真命题.

并且也使用了谓词逻辑的规则：

$$(A \vee \forall x B(x) \leftrightarrow \forall x(A \vee B(x)), \quad (7.6)$$

其中变元 x 不在 A 中出现，这些规则在直观上都是很清楚很显然的. 如同我们在自然语言中讲话一样，我们说"张三今天来这里或者李四今天来这里"当然和说"李四今天来这里或者张三今天来这里"含意是一样的，效果是一样的. 同样道理也可理解 ($l.23$). 读者可以给出它的真值表的等价性的证明. 对于(7.6)情况当然要更复杂一些，但是只要注意到 x 与 A 无关，问题也是不难理解的，这样一些规则我们可以当作日常思维常用的规律而使用之.

再证(2)，同样，对于任意集合 t，我们有：

$$t \in S_1 \cap \bigcup S_2 \leftrightarrow t \in S_1 \wedge t \in \bigcup S_2$$

$$\leftrightarrow t \in S_1 \wedge \exists x(x \in S_2 \wedge t \in x)$$

$$\leftrightarrow \exists x(x \in S_2 \wedge t \in S_1 \wedge t \in x)$$

$$\leftrightarrow \exists x(x \in S_2 \wedge t \in S_1 \cap x)$$

$$\leftrightarrow t \in \bigcup\{S_1 \cap x \mid x \in S_2\}.$$

类似地，就获得了欲证结果.

在上述推演过程中使用了谓词逻辑的规则

$$A \vee \exists x B(x) \leftrightarrow \exists x(A \vee B(x)), \tag{7.7}$$

其中变元 x 不出现在公式 A 中，这一规则在直观上也是容易理解的.

关于这种符号表示的另一个例子，假设集合 S_1 和 S_2 都是考虑中的集合. 那么集合

$$\{S_2 \dot{-} x \mid x \in S_1\}$$

的元是 S_1 的元的相对于 S_2 的补集合，即对于任何 t，

$$t \in \{S_2 \dot{-} x \mid x \in S_1\} \leftrightarrow \exists x(x \in S_1 \wedge t = S_2 \dot{-} x).$$

同理，$\{Px \mid x \in S_1\}$ 是下述定义的集合

$$t \in \{Px \mid x \in S_1\} \leftrightarrow \exists x(x \in S_1 \wedge t = P(x)),$$

能够证明任何这样一个集合都是存在的.

达·摩尔根定律(对于集合 $S_1 \neq \varnothing$)

$$S_2 \dot{-} \bigcup S_1 = \bigcap\{S_2 \dot{-} x \mid x \in S_1\},$$

$$S_2 \dot{-} \bigcap S_1 = \bigcup\{S_2 \dot{-} x \mid x \in S_1\}.$$

如果 $\bigcup S_1 \subset S$，则此定律可写成

$$\dot{-} \bigcup S_1 = \bigcap\{\dot{-} x \mid x \in S_1\},$$

$$\dot{-} \bigcap S_1 = \bigcup\{\dot{-} x \mid x \in S_1\}.$$

其中 $\dot{-} x$ 理解成 $S \dot{-} x$.

例如，为了证明对于非空集合 S_1，等式

$$S_2 \dot{-} \bigcup S_1 = \bigcap\{S_2 \dot{-} x \mid x \in S_1\}$$

成立，我们可以按下述方式证明:

$t \in S_2 \dot{-} \bigcup S_1 \to t \in S_2$，但 t 不属于 S_1 的元

$\to t \in S_2 \dot{-} x$，对于 S_1 中的每一元 x

$\to t \in \bigcap\{S_2 \dot{-} x \mid x \in S_1\}$.

而且，把每一步反过来，使得"$\longrightarrow$"能够变成"$\longleftrightarrow$"。(请读者注意，什么地方用到 $S_1 \neq \varnothing$？)

关于符号表示的一个注释：存在关于并与交的某些其它的书写式样，我们已经用过。例如，当 S_2 为不空集合时，

$$\bigcap\{S_1 \cup x \mid x \in S_2\}$$

可以写成

$$\bigcap(S_1 \cup x),$$

$\bigcup\{S_2 \dot{-} x \mid x \in S_1\}$ 可以写成

$$\bigcup_{x \in S_1}(S_2 \dot{-} x).$$

$\bigcup\{S_1 \cup x \mid x \in S_2\}$ 可以写成

$$\bigcup_{x \in S_2} S_1 \cup x.$$

习　　题

1. 令 $S := \{\{3, 5\}, \{5, 8, 9\}\}$，计算：

(1) $\bigcup S$，

(2) $\cup \bigcup S$.

2. 计算并化简：

(1) $\bigcup\{0, 1, \{1\}, 2\}$，

(2) $\bigcup\{0, 1, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.

3. 设 S 为任意的不空集合，试证明：

$$S \subset P(\bigcup S)$$

成立，并指出在什么条件下，可以把包含号换成等号呢？

4. 设 S 为一传递集合，证明 S^+ 是一传递集合。

5. 设 S_1 与 S_2 为二传递集合，证明：$S_1 \cup S_2$ 是一传递集合。

6. 设 S_1 与 S_2 为二传递集合，证明：$S_1 \cap S_2$ 是一传递集合。

7. 证明：对于任一集合 S，S 是传递的当且仅当 $\bigcup S \subset S$。

8. 试给出集合 x 和 y 的例子，使得

(1) $x \cap y \neq \varnothing$，

(2) $\bigcap x \cap \bigcap y \neq \bigcap (x \cap y)$，

同时成立。

9. 计算：

(1) $\bigcup \{P(P(P(\varnothing))), P(P(\varnothing)), P(\varnothing), \varnothing\}$，

(2) $\bigcup \{P(P(P(\varnothing))), P(\varnothing), \varnothing\}$。

10. 计算：

(1) $\bigcap \{P(P(P(\varnothing))), P(P(\varnothing)), P(\varnothing), \varnothing\}$，

(2) $\bigcap \{P(P(P(\varnothing))), P(P(\varnothing)), P(\varnothing)\}$。

第八章　笛卡尔积与分离公理

本章首先引进有序对集合，一方面为了讨论笛卡尔积，另一方面它本身也有着重要的作用．本章 § 2 引进笛卡尔积的概念，并建立它的合法性定理，§ 3 引进分离公理模式，讨论分离公理模式的基本含义和作用．§ 4 给出分离公理模式的四项推论，从分离公理模式出发，交集合公理和相对补集合公理都已变成了明显的推论，也就是说，它们仅仅是分离公理模式的一种特殊的形式；由分离公理模式还可以证明广义交集合的存在性定理；并且使用分离公理模式我们还可证明：不存在一集合使得每一集合都是它的元素．这些概念和定理对于集合论来讲都是很基本的，读者应当弄清这些基本概念和结果，初步学会这种论证方法．

§ 1　有　序　对

恰好有两个元素 a, b，而且 a 在前，b 在后，这种集合叫做有序对，和以前谈到的无序对不同，它的元有确定的次序，这叫做有序对集合，记做 $\langle a, b\rangle$，这种集合该如何定义呢？也就是说，如何利用已有的集合（主要是单元集合和无序对集合）来定义有序对集合呢？　历史上曾出现过不同的定义法，

1921 年波兰数学家库兰达夫斯基（K. Kuratowski）给出了一个定义，大家都感到满意，现在已成为公认的定义了。

定义 8.1 $\langle a, b\rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

由定义 8.1，集合 $\langle a, b\rangle$ 显然是比 a, b 高二层的集合，是它们的集合的集合． 为了证明这定义的合理性，必须证明这个集合由 a 与 b 唯一决定了，而且给出 $\langle a, b\rangle$ 时也唯一决定了 a 与 b 以及它们的顺序. 比如无序对集合有:

$$\{a, b\} = \{b, a\},$$

而不管 a, b 的次序；有序对集合则不然，在一般情况下

$$\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle,$$

这就是"序"的要求.

定理 8.1 $\langle u, v\rangle = \langle x, y\rangle$ 当且仅当 $u = x$ 并且 $v = y$.

证明 当 $x = u$, $y = v$ 时，有

$$\{x\} = \{u\}, \{u, v\} = \{x, y\},$$

当然就有 $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ 了，即证得了

$$\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle.$$

现在我们假定 $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$，即

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}.$$

因此有:

$$\{u\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\},$$

$$\{u, v\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

由第一个式子，我们可获得下二式必有一个成立:

$$(1)\ \{u\} = \{x\} \text{ 或 } (2)\ \{u\} = \{x, y\};$$

由第二个式子，下二式必有一个成立:

$$(3)\ \{u, v\} = \{x\} \text{ 或 } (4)\{u, v\} = \{x, y\}.$$

若(2)成立，可得 $u = x = y$，这时，当(3)成立时，就有

$$v = u = x = y$$

(类似地，当(4)成立时也同样有 $v = u = x = y$)；若(1)成立，可得 $u = x$ 并且(4)成立，就有 $v = y$ 或者 $u = y$ 成立。当 $u = y$ 时，这时(2)成立，即不管怎样，都有

$$v = u = x = y;$$

当 $v = y$ 时，也是我们所希望的结果。

根据定义 8.1 和定理 8.1，可以把平面上的一个点看作一个有序对集合 $\langle x, y\rangle$，它的第一个元素 x 是平面上点的横坐标分量，第二个元素 y 就是平面上点的纵坐标分量。平面上点的这种表示法是笛卡尔在集合论产生之前就给出了，现在是用集合论的方法定义有序对，并把它作为一种集合来处理问题。

§2 笛卡尔积

定义 8.2 对于任意的两个集合 S_1，S_2，我们汇集所有这样的有序对集合 $\langle x, y\rangle$ (其中 $x \in S_1$，$y \in S_2$) 成为一个整体，即

$$S_1 \times S_2 := \{z \mid \exists x \exists y (x \in S_1 \wedge y \in S_2 \wedge z = \langle x, y\rangle\},$$

叫做 S_1 与 S_2 的笛卡尔乘积或卡氏积。

定理 8.2 对于任意的集合 S_1 与 S_2，它们的笛卡尔乘积 $S_1 \times S_2$ 也是一集合。

证明 首先若 $x \in S$，$y \in S$，则 $\langle x, y\rangle \in P(P(S))$，亦即 $\langle x, y\rangle$ 属于 S 的幂集合的幂集合，这是因为：

$$x \in S \text{ 且 } y \in S,$$

由子集合的定义，有：

$$\{x\} \subset S \text{ 且 } \{x, y\} \subset S,$$

由幂集合的定义，有：

$$\{x\} \in P(S) \text{ 且 } \{x, y\} \in P(S),$$

由子集合的定义，有：

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \subset P(S),$$

再由幂集合的定义，有：

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \in P(P(S)),$$

即

$$\langle x, y\rangle \in P(P(S)).$$

其次，当 $x \in S_1$，$y \in S_2$ 时，取 $S := S_1 \cup S_2$，自然有

$$\langle x, y\rangle \in P(P(S_1 \cup S_2)).$$

第三，由 $S_1 \times S_2$ 的定义，显然有：

$$S_1 \times S_2 = \{z \mid z \in P(P(S_1 \cup S_2)) \wedge \exists x \exists y (x \in S_1 \wedge y \in S_2 \wedge z = \langle x, y\rangle)\}.$$

由此，我们已获得

$$S_1 \times S_2 \subset P(P(S_1 \cup S_2)). \tag{8.1}$$

并且 $S_1 \times S_2$ 的任一元 Z 都满足条件

$$\exists x \exists y (x \in S_1 \wedge y \in S_2 \wedge Z = \langle x, y\rangle). \tag{8.2}$$

在下节读者将会看到(8.1)和(8.2)式保证了 $S_1 \times S_2$ 是一集合。

注 1 由定义 8.2，当 $S_1=\varnothing$ 或 $S_2=\varnothing$ 时，

$$S_1\times S_2=\varnothing,$$

即对任意的集合 S，我们都有

$$S\times\varnothing=\varnothing\times S=\varnothing.$$

这是因为，对任意的集合 z，由定义 8.2 都有

$$z\in S_1\times S_2\longleftrightarrow\exists x\exists y(x\in S\wedge y\in\varnothing\wedge z=\langle x,y\rangle).$$

但是，$y\in\varnothing$ 恒假，因此双蕴涵词"$\longleftrightarrow$"右边的命题

$$\exists x\exists y(x\in S\wedge y\in\varnothing\wedge z=\langle x,y\rangle)$$

恒假，由此，$z\in S_1\times S_2$ 亦恒假．所以 $S\times\varnothing=\varnothing$，类似地可获得 $\varnothing\times S=\varnothing$.

注 2 一般来说，除非在特殊情况下，笛卡尔乘是不可交换的．例如令 $S_1=\{2\}, S_2=\{\{3\},\{4\},\{\omega\}\}$，这时我们有

$$S_1\times S_2=\{\langle 2,\{3\}\rangle,\langle 2,\{4\}\rangle,\langle 2,\{\omega\}\rangle\},$$

$$S_2\times S_1=\{\langle\{3\},2\rangle,\langle\{4\},2\rangle,\langle\{\omega\},2\rangle\}.$$

很显然，$S_1\times S_2\neq S_2\times S_1$.

§3 分离公理模式

我们来考察(8.1)式，已知 S_1 与 S_2 为二集合，由二个集合的并，得到 $S_1\cup S_2$ 是一集合，两次使用幂集合公理，即得到 $P(P(S_1\cup S_2))$ 为一集合．(8.1) 成立就表示 $S_1\times S_2$ 为集合 $P(P(S_1\cup S_2))$ 的一部分(当我们知道 $S_1\times S_2$ 是一集合时，我们就可以说 $S_1\times S_2$ 是集合 $P(P(S_1\cup S_2))$ 的一子集合．但

是仅由(8.1)式还不能断定 $S_1 \times S_2$ 是一集合). 可依据第二章中给出的公式的形成规则，验证(8.2)式是一个公式，它表达一种性质或一个条件，仅仅是满足一条件的所有对象也不一定能够汇合成一个集合. 但是同时满足这两个条件的对象能否汇合成一集合呢? 仅仅使用已陈述的公理是不够的，是不能断定它是一集合的. 这就需要我们引进新的公理.

分离公理模式 对于任意的集合 S 和任意的公式 $A(x)$，都存在一集合 S_0，使得

$$S_0 = \{x \mid x \in S \wedge A(x)\}.$$

也就是说，S_0 是由 S 中满足条件 $A(x)$ 的所有元素所组成. 当我们用图形来描述集合 S_0 与已知集合 S 和条件 $A(x)$ 的关系时，就会获得一个直观形象的说明(见图1). 图1a 是表示满足 $A(x)$ 的所有集合 x 的一种汇合，如前所述，它不一定是一集合，至少仅仅依据它还不能判断它是一集合. 图1b 表示已知集合 S. 图1c 的阴影部分表示满足上述二条的公共部分，这就是 S_0，由分离公理断定它是一集合. 断定 S_0 是一集合，这也正是分离公理的内容和它所起的作用。

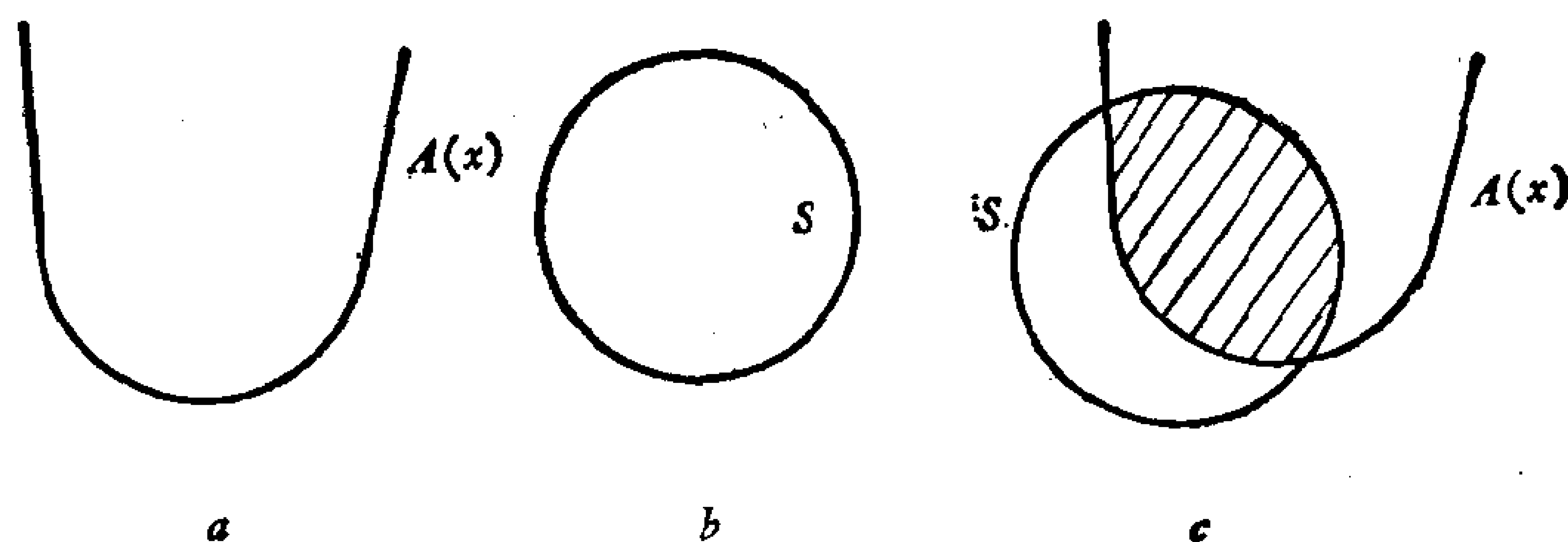


图1 分离公理模式示意图

在使用分离公理时，常常是这样的，如已知某个类的每一元都满足一给定条件，但不知道这个类是否能形成一个集合.（也就是说，已知一条件 $A(x)$，满足这一条件的所有集合 x 能否组成一集合呢？）这时，我们只需找到一个集合，使得满足这些条件的每一元 x，都有 $x\in S$. 由此，即可断定

$$\{x\mid A(x)\}$$

组成一集合，因为这时我们有

$$\{x\mid A(x)\}=\{x\mid x\in S\wedge A(x)\},$$

而等式右边，由分离公理显然是一集合. 用图形来描述上述论证时，这就是我们已知满足公式 $A(x)$ 的所有集合组成如图 2a 的图形. 但这时我们还不能断定它组成一集合，于是我们寻找一集合 S，使得：

$$\forall x(A(x)\rightarrow x\in S) \tag{8.3}$$

成立. 这时就有图 2b，即其中带阴影的部分为一集合了.

定理 8.2 的证明也是按上述思路进行的，因为 (8.2) 式正

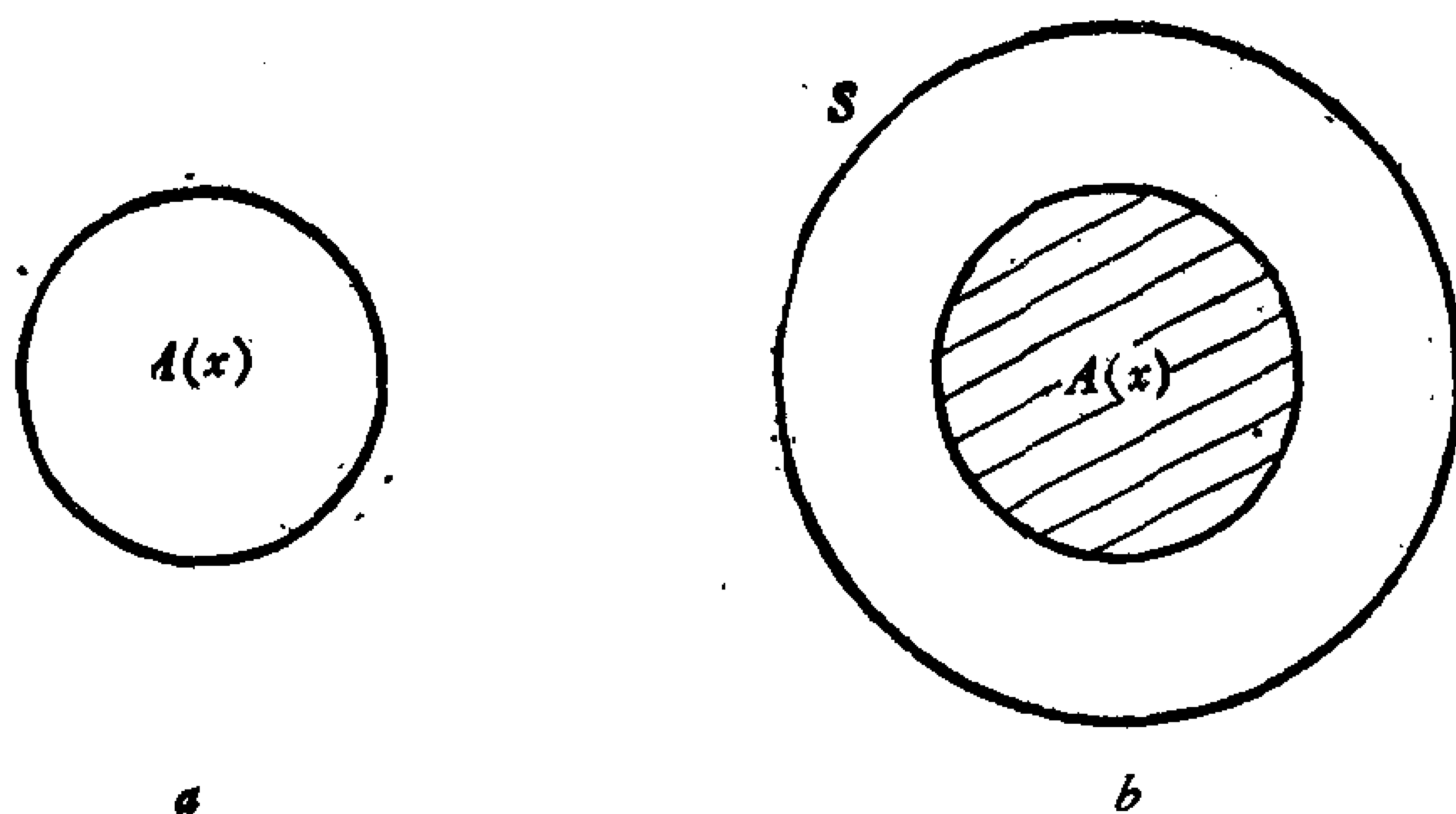


图 2　分离公理模式的应用示意图

是 $S_1 \times S_2$ 的定义的条件，由这一条件不能直接断定 $S_1 \times S_2$ 是一集合，于是就要求找到一集合 S，使 $S_1 \times S_2 \subset S$，我们从集合 S_1 与 S_2 出发，逐步地构造了集合 $S_1 \cup S_2$，$P(S_1 \cup S_2)$ 和 $P(P(S_1 \cup S_2))$，后者就是我们要寻找的集合 S. 这样由分离公理. 就获得了欲证结果.

这一公理的名称是由任给一非空集合 S，有许多 S 的子集合，但是这些子集合如何获得呢？当然，任一集合 x，若 $x \in S$，则 $\{x\}$ 是 S 的一子集合. 任二集合 x，y，若 $x \in S$，$y \in S$，则 $\{x, y\}$ 也是 S 的一子集合. 但是按照这种方法只能得到某些有穷子集合，而不能获得 S 的无穷的真子集合(当 S 是一无穷集合时). 如何获得具有确定性质的无穷子集合呢？由确定的公式就可分离出具有确定性质的无穷子集合，用公式(即条件、性质)分离出 S 的子集合，这就是"分离"二字的含义，因为获得的总是 S 的某一子集合，所以，有时也称它为子集合公理.

例 1 令公式 $A(x)$ 为 $\exists y(y \in \omega \wedge x = 2y)$，这时集合

$$S_1 := \{x \mid x \in \omega \wedge A(x)\},$$

就是通常讲的偶数集合. 也就是说 ω 的由公式 $A(x)$ 分离出的子集合(当然它是一无穷集合). S_1 是通常的偶数集合.

例 2 令公式 $B(x)$ 为 $\exists y(y \in \omega \wedge x = 2y + 1)$，这时集合

$$S_2 := \{x \mid x \in \omega \wedge B(x)\},$$

就是通常讲的奇数集合. 也就是说，ω 的由公式 $B(x)$ 分离出的子集合 S_2 是通常的奇数集合.

注 3 现代集合论的研究表明一无穷集合，比如 ω，它的子部分不一定是一集合. 也就是说，ω 的某些子部分并非是经过某些公式分离出来的，那么这些子部分就不一定能汇合为集合. 这一事实更说明了分离公理的重要性.

注 4 分离公理模式中的"模式"一词表示它不是一条公理，而是无穷多条公理的共同"模式"，换句话说，对于任意公式 $A(x)$，都对应一条公理，它可以写成

$$\forall y \exists z \forall x (x \in z \leftrightarrow x \in y \wedge A(x)).$$

其中"$\forall y$"意思是指任意的集合 y. 在我们陈述分离公理模式时，"任意的集合 S"一语不会产生无穷多条公理，因为可用量词 $\forall$ 描述，而在模式中"任意的公式 $A(x)$"使得每一公式对应一条公理，因而得到了无穷多条公理. 因为变量的变域是集合，而不是公式，前者可以使用量词 $\forall$ 直接去表达"任意的集合"，后者就不能使用量词 $\forall$ 表达"任意的公式".

§4 分离公理模式的推论

分离公理模式是一组重要的公理，在集合论的发展中起着重要的作用，人们常常要运用它去形成新的集合和新的运算. 这里我们首先使用它直接证明两个集合的交集合与相对补集合的存在性定理，也就是说，我们在第一章中引进的交集合公理与相对补集合公理都是分离公理模式的推论，因而不必作为公理单独提出. 然后，我们再讨论不空集合的广义交集合的存在性定理. 最后，我们将指出不存在一个含有所有

集合的集合.

1.两集合的交集合的存在性定理

定理 8.3 对于任意的集合 S_1 与 S_2,它们的交集合 $S_1 \cap S_2$ 是存在的.

证明 对于任意给定的集合 S_1 与 S_2,我们可以选取公式 $x \in S_2$ 作为分离公理模式中的公式 $A(x)$,由集合 S_1 与公式 $x \in S_2$,依据分离公理,存在一集合 S_0,使得:

$$S_0 = \{x \mid x \in S_1 \land x \in S_2\}.$$

显然,$S_0 = S_1 \cap S_2$,由此,我们就获得了欲证结果.

2 两集合的相对补集合的存在性定理

定理 8.4 对于任意的集合 S_1 与 S_2,集合 S_1 与 S_2 的相对补集合 $S_1 \dot{-} S_2$(或 S_2 相对于 S_1 之补)是存在的.

证明 对于任意给定的集合 S_1 与 S_2,我们可以选取公式 $x \notin S_2$ 作为分离公理模式中的 $A(x)$,这里由集合 S_1 与公式 $x \notin S_2$,依据分离公理,存在一集合 S_0,使得:

$$S_0 = \{x \mid x \in S_1 \land x \notin S_2\}.$$

显然,$S_0 = S_1 \dot{-} S_2$,由此,我们就获得了欲证的结果.

3.不空集合的广义交集合的存在定理

定理 8.5 对于任意的不空集合 S,则广义交集合 $\bigcap S$ 是存在的.

证明 假定有集合 S_1 使得 $S_1 \in S$,并且选取公式

$$\forall y(y \in S \rightarrow x \in y)$$

作为分离公理模式中的公式 $A(x)$,这时,由分离公理模式,就存在一集合 S_0,使得

$$S_0 = \{x \mid x \in S_1 \wedge \forall y(y \in S \to x \in y)\}. \tag{8.4}$$

不难看出 $S_0 = \bigcap S$，因为由(7.6)式，可知

$$\bigcap S = \{x(\forall y(y \in S \to x \in y)\},$$

然而，由 $S_1 \in S$，从 $\forall y(y \in S \to x \in y)$ 自然可获得 $x \in S_1$，所以，从 $\forall y(y \in S \to x \in y)$ 即可获得

$$x \in S_1 \wedge \forall y(y \in S \to x \in y).$$

因此，使用(8.4)式，就有 $S_0 = \bigcap S$. 即欲证结果成立.

4. 不存在含有一切集合为某元素的集合

定理 8.6 不存在一个集合 S，使得任一集合都属于它.

证明 假定存在一个这样的集合 S，它满足定理的要求，即任一集合都是 S 的元素. 由此，我们选取公式 $x \notin x$，并依据分离公理，我们有集合 S_0，使得：

$$S_0 = \{x \mid x \in S \wedge x \notin x\}, \tag{8.5}$$

由(8.5)式，即得到

$$x \in S_0 \leftrightarrow x \in S \wedge x \notin x, \tag{8.6}$$

我们由此来证明 $S_0 \notin S$，因为在(8.6)中，我们取 x 为 S_0 时，即得

$$S_0 \in S_0 \leftrightarrow S_0 \in S \wedge S_0 \notin S_0, \tag{8.7}$$

如果 $S_0 \in S$ 成立，就获得了

$$S_0 \in S_0 \leftrightarrow S_0 \notin S_0, \tag{8.8}$$

而这是不可能的. 由此，$S_0 \notin S$. 这样就找到了一集合 S_0 不属于 S，因此，就获得了我们的欲证结果.

注 5 定理 8.6 是说不存在一个集合，使得所有的集合都是它的元素，也就是说"全集合"是不存在的.

在现代集合论著作中常常引入类的概念，类是比集合更广泛的一个概念．它们可以由集合和公式一起加以刻划．所有集合的形成的整体不是一集合，但它是一类．也就是说，存在一个类，使得每一集合都是它的元素．

现在，我们来分析定义 7.1 的条件是否可以去掉，即，我们考察当 $S=\varnothing$时，能否定义 $\bigcap S$? 由定理 7.5，我们知道，当 $S_1 \subset S_2$，就有 $\bigcap S_2 \subset \bigcap S_1$，即 $\bigcap S_2$ 小于 $\bigcap S_1$． 换言之，当 S_2 越来越大时，$\bigcap S_2$ 越来越小．一个特殊的情况，就是我们说的 $S=\varnothing$时．$\bigcap S$ 怎样呢? 我们假定 $\bigcap \varnothing$ 是集合，这样由定义对于任意的集合 x，都有：“$x \in \bigcap S$ 当且仅当对于所有的 y，若 $y \in S$，则 $x \in y$”．因为 S 是空集合，所以对于任一的集合 y，$y \in S$ 即 $y \in \varnothing$ 恒假，所以“$y \in \varnothing \rightarrow x \in y$”恒真．也是说，“$y \in \varnothing \rightarrow x \in y$”恒真，因此，对于一切集合 x，我们已有

$$x \in \bigcap \varnothing.$$

这就获得了一个含有所有集合的集合 $\bigcap \varnothing$，与定理 8.6 矛盾．因此，在定义 7.1 中 $S \neq \varnothing$ 这一条件是不能够去掉的．

其次，对于定义 $\bigcap S$，在使用分离公理去论证 $\bigcap S$ 的合法性时，尚需要求有一集合 $S_1 \in S$，这正是(8.4)所要求的．

还有一条称为替换公理模式，它比分离公理模式更强些，前者蕴涵后者，反之不然．这条公理模式是说，对于任意的公式 $A(x, y)$，若 $\forall x \exists ! y A(x, y)$，对于所有的集合 u，则存在一集合 S，有

$$\forall z(z \in S \leftrightarrow \exists t \in u A(t, z))$$

成立．这一集合S的任一元素z，都是与u中某一元素t，使得$A(t, z)$成立． 我们也可以这样来刻划这一集合S，它既和公式$A(x, y)$有关系，并且条件$\forall x \exists ! y A(x, y)$不可缺少，又和集合$u$有关．在$A(x, y)$与$u$给定时，我们有

$$S = \{z \mid \exists t(t \in u \wedge A(t, z))\}.$$

由外延公理，这一集合是唯一的． 这一公理模式为我们提供了构造集合的广阔途径．

习　　题

1．判断下述集合哪些是有序对集合，哪些不是有序对集合． 若是有序对集合就用尖括号表示出来．

(1) $\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, 2\}\}$,

(2) $\{\{3\}, \{\{3\}, \{5\}\}\}$,

(3) $\{2, \{2\}\}$,

(4) $\{1, \{0, 5\}\}$,

(5) $\{\{2\}, \{3, 2\}\}$,

(6) $\{\{3\}, \{4, 5\}\}$.

2．证明：若$x \in S$，$y \in S$，则它们的有序对$\langle x, y\rangle \in P(P(P(\bigcup S)))$.

3．证明：对于任意集合S_1，S_2，存在一集合S，使得对于任意集合y，都有一集合$x \in S_1$，并且

$$y \in S \leftrightarrow y = \{x\} \times S_2.$$

4．令$S_1 = \{0, 1, 2\}$，$S_2 = \{2, 3, 4\}$求$S_1 \times S_2$.

5．令$S_1 = \{0, 1\}$，$S_2 = \{2, 4, 5\}$，求$S_1 \times S_2$.

6．证明：$x \times (y \cup z) = (x \times y) \cup (x \times z)$.

7．证明：$x \times y = x \times z$，并且$x \neq \varnothing$则$y = z$.

8．假定x是任一集合，证明：$x \subset x \times x$当且仅当$x = \varnothing$.

9．证明：存在一集合S，它由所有的素数所组成.

10.证明：所有孪生数组成的集合是存在的(提示：一自然数 n 叫做一个孪生数，当且仅当 n 和 $n+2$ 都是素数)。

11.证明：不存在一个集合 S，使得所有的有序对集合都是 S 的元素。

第九章　关系、函数

本章讨论一类特殊的集合，被称为关系，对关系再做一定的限制就得到函数，并讨论关系与函数的一些性质.

§1　关　　系

在第八章中我们已经讨论了有序对，它是一种特殊的集合，也讨论了笛卡尔乘积，它也是一种特殊的集合，本节讨论的关系是有序对和笛卡尔乘积的继续，什么是关系呢?

定义 9.1　有序对的一集合 R 叫做一关系. 即:

$$\forall x \in R \exists y \exists z (x = \langle y, z \rangle).$$

也就是说，一集合 R，它的每一元都是一有序对时，就叫 R 为一关系.

在日常生活中，在数学中，关系的例子很多，比如父子、师生、同学、等等都是关系. 令 R_1 表示父子关系，$\langle x, y \rangle \in R_1$ 表示 x 是 y 的父亲，令 R_2 为师生关系，$\langle x, y \rangle \in R_2$ 表示 x 是 y 的老师，令 R_3 表示同学关系，我们已知张三、李四是同学，所以〈张三、李四〉$\in R_3$，等等.

在数学中“小于($<$)”是一关系，比如集合 $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ 就是对于集合 $\{1, 2, 3\}$ 上的一个小于关系，其实

$\omega\times\omega$ 的任一子集合都是一关系. 事实上，任一关系的子集合都是一关系. 特别需要指出，空集合也是一关系. $\omega\times\omega$ 本身也是一关系. 一般说来，对于任一集合 S_1, S_2，它们的笛卡尔乘积 $S_1\times S_2$ 的任一子集合 R 都是一关系. 并称 R 为从 S_1 到 S_2 的一关系，当 $S_1=S_2$ 时，有时也称 R 为 S_1 上的一关系.

对于一关系 R，我们常以 xRy 或 $R(x,y)$ 表示 $\langle x,y\rangle\in R$，并以 $x\bar{R}y$ 或 $\neg R(x,y)$ 表示 $\langle x,y\rangle\notin R$.

定义 9.2 令 R 为任一关系，我们定义 R 的定义域 dom (R)，值域 ran (R)，和域 fld (R) 如下:

$$\text{dom}(R):=\{x\mid\exists y(\langle x,y\rangle\in R)\},\tag{9.1}$$

$$\text{ran}(R):=\{y\mid\exists x(\langle x,y\rangle\in R)\},\tag{9.2}$$

$$\text{fld}(R):=\text{dom}(R)\cup\text{ran}(R).\tag{9.3}$$

定理 9.1 如果 $\langle x,y\rangle\in R$，则 $x\in\bigcup\bigcup R$，$y\in\bigcup\bigcup R$.

证明 因为 $\langle x,y\rangle\in R$. 即 $\{\{x\},\{x,y\}\}\in R$，从而 $\{x,y\}\in\bigcup R$，这是因为 $\{x,y\}\in\{\{x\},\{x,y\}\}$，后者是 R 的一元素，而且，由此可得到 $x\in\bigcup\bigcup R$ 和 $y\in\bigcup\bigcup R$.

定理 9.2 若 R 是一关系，则 dom(R)，ran(R) 和 fld(R) 都是集合.

证明 我们仅须证明 dom(R) 及 ran(R) 是集合即可，我们可使用定理 9.1 和子集合公理构造 dom(R) 和 ran(R) 如下:

$$\text{dom}(R)=\{x\mid x\in\bigcup\bigcup R\wedge\exists yR(x,y)\},$$

$$\operatorname{ran}(R)=\{y \mid y\in\bigcup\bigcup R\wedge\exists xR(x,y)\}.$$

由此，$\operatorname{dom}(R)$，$\operatorname{ran}(R)$，$\operatorname{fld}(R)$ 均是集合。

定理 9.3 如果 R 是一关系，则 $\operatorname{fld}(R)=\bigcup\bigcup R$.

证明 对于任一集合 x，若 $x\in\operatorname{fld}(R)$，就意味着存在一集合 y，使得 $\langle x, y\rangle\in R$，或 $\langle y, x\rangle\in R$，不管那一种情况，由定理 9.1，都有 $x\in\bigcup\bigcup R$.

反之，因为 R 是一关系，它的元素都是有序对，即它的元素都有这种形式：$\{\{x\}, \{x, y\}\}$，而任一集合 $t\in\bigcup\bigcup R$，则必有集合 u 使得 $\{\{t\},\{t,u\}\}\in R$ 或 $\{\{u\},\{t,u\}\}\in R$，亦即 $t\in\operatorname{fld}(R)$.

总之，我们有 $\operatorname{fld}(R)=\bigcup\bigcup R$.

习　　题

1. 设 S 是一集合，证明 S 是一关系当且仅当 $S\subset\operatorname{dom}(S)\times\operatorname{ran}(S)$.

§2　n 元 关 系

上节讲到的关系可以说是二元关系，我们可以把有序对的概念推广到三元有序集，称有序三元组，通常定义为：

$$\langle x, y, z\rangle:=\langle\langle x, y\rangle, z\rangle. \tag{9.4}$$

其中 x, y, z 为任意的集合，类似地，能够定义有序四元组

$$\langle x, y, z, t\rangle:=\langle\langle x, y, z\rangle, t\rangle=\langle\langle\langle x, y\rangle, z\rangle, t\rangle.$$

同理还可继续按此方式定义有序五元组，六元组，以至于对于任意的自然数 n，可以定义有序 n 元组．为了统一起见，

我们也规定一元组：$\langle x\rangle := x$.

还应注意，当 $\langle x,y,z\rangle\in R$，因为我们有

$$\begin{aligned}\langle x,y,z\rangle &= \langle\langle x,y\rangle,z\rangle\\ &= \{\{\langle x,y\rangle\},\{\langle x,y\rangle,z\}\}\\ &= \{\{\{\{x\},\{x,y\}\}\},\{\{\{x\},\{x,y\}\},z\}\}.\end{aligned}$$

所以 $z\in\bigcup\bigcup R$，$x\in\bigcup\bigcup\bigcup\bigcup R$，$y\in\bigcup\bigcup\bigcup\bigcup R$，这就得出了有序三元组中元素的分量的层次关系，类似地可得出有序 n 元组元素与分量的层次关系.

我们把集合 S 的 n 元关系定义为一个其所有分量都属于 S 的有序 n 元组的集合，例如，关于 S 上的一二元关系为 $S\times S$ 的一个子集合，一个 S 上的三元关系为 $(S\times S)\times S$ 的一个子集合等等. 而 S 上的一个一元关系恰好是 S 的一个子集合.

习　题

1. 对于任意的 $m\in\omega$，$2\leqslant m$，证明任一 m 元关系都可化为一个二元关系.

2. 证明：$\langle x_1,x_2,x_3\rangle=\langle y_1,y_2,y_3\rangle$ 当且仅当 $y_1=x_1$，$y_2=x_2$，$y_3=x_3$.

§3　关系的表示法

一关系的直接表示法主要是枚举法、条件表示法、矩阵表示法和图形表示法，间接表示法主要是通过某些已知关系和已知运算表示出来.

首先我们来考察枚举法和图形法，我们先用枚举法给出关系R如下：

例 1 先枚举关系R.

$$R:=\{\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 4,3\rangle,$$
$$\langle 4,1\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 5,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 5,0\rangle,\langle 3,4\rangle\}.$$

可知 $\mathrm{dom}(R)=\{0,1,2,4,5\}$.

并且 $\mathrm{ran}(R)=\mathrm{dom}(R)$，所以 $\mathrm{fld}(R)=\mathrm{dom}(R)$. 这一关系$R$可以用图形直接表示出来，如图1，先求出$R$的定义域 $\mathrm{dom}(R)$ 和R的值域 $\mathrm{ran}(R)$，并分别在两条直线上标上它们的元素，然后考察关系R中的元素(有序对)，如$\langle 4,3\rangle\in R$，就从 $\mathrm{dom}(R)$ 中的点4起连上 $\mathrm{ran}(R)$ 中的点3，这样每一直线就表示了R中的一个元素. 也可以用其它方法给出图形，

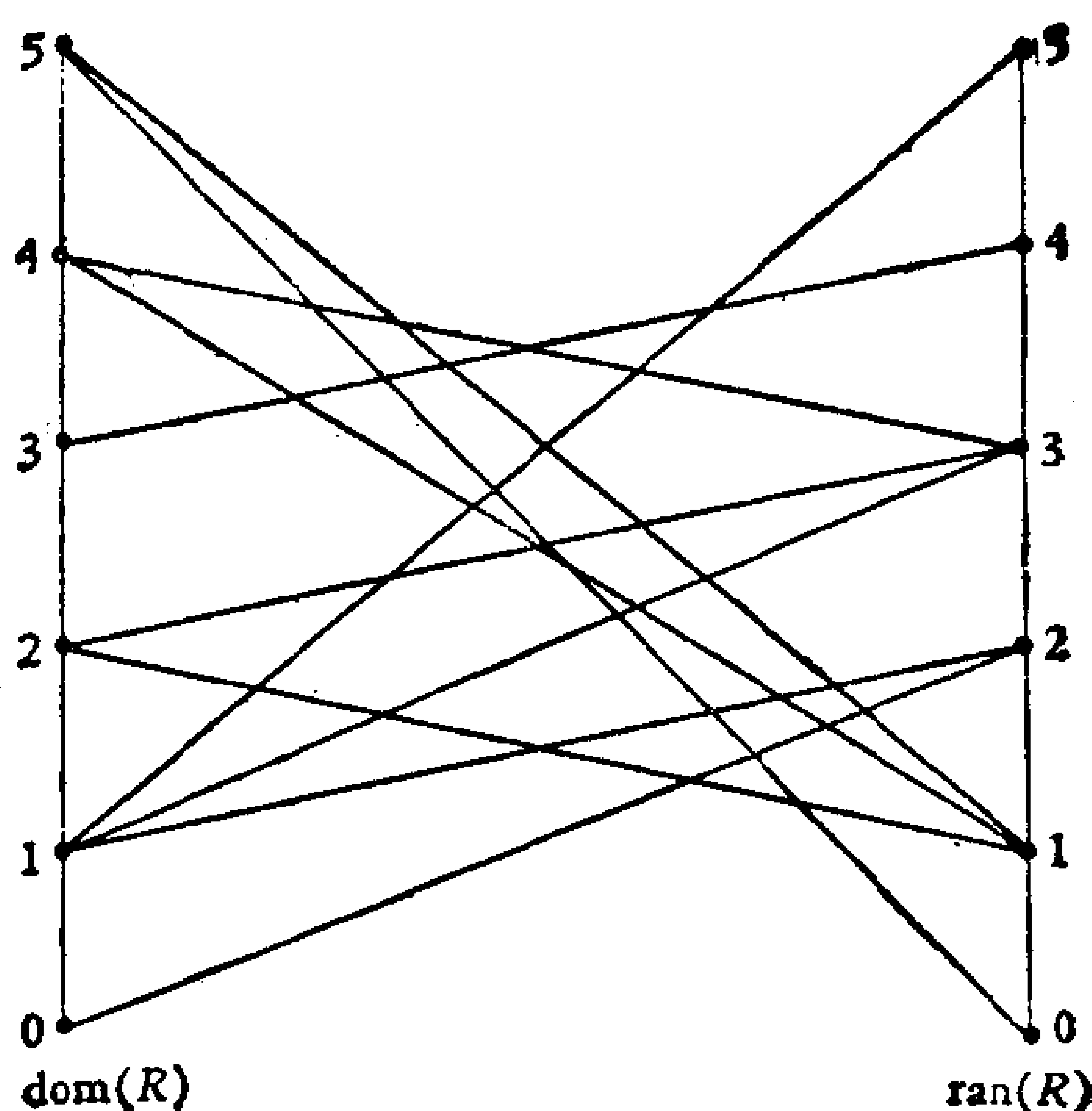


图1 R的反应图

例如就上述关系而言，我们可以用 dom(R) 表示横坐标，用 ran(R) 表示纵坐标，这样，我们就建立了一个平面直角坐标系（如图 2），上述关系 R 就是这一坐标系上的 11 个点．事实上在图 2 的第一象限上任一组点都表示了 $\omega\times\omega$ 上的一子集合，即它的一关系。

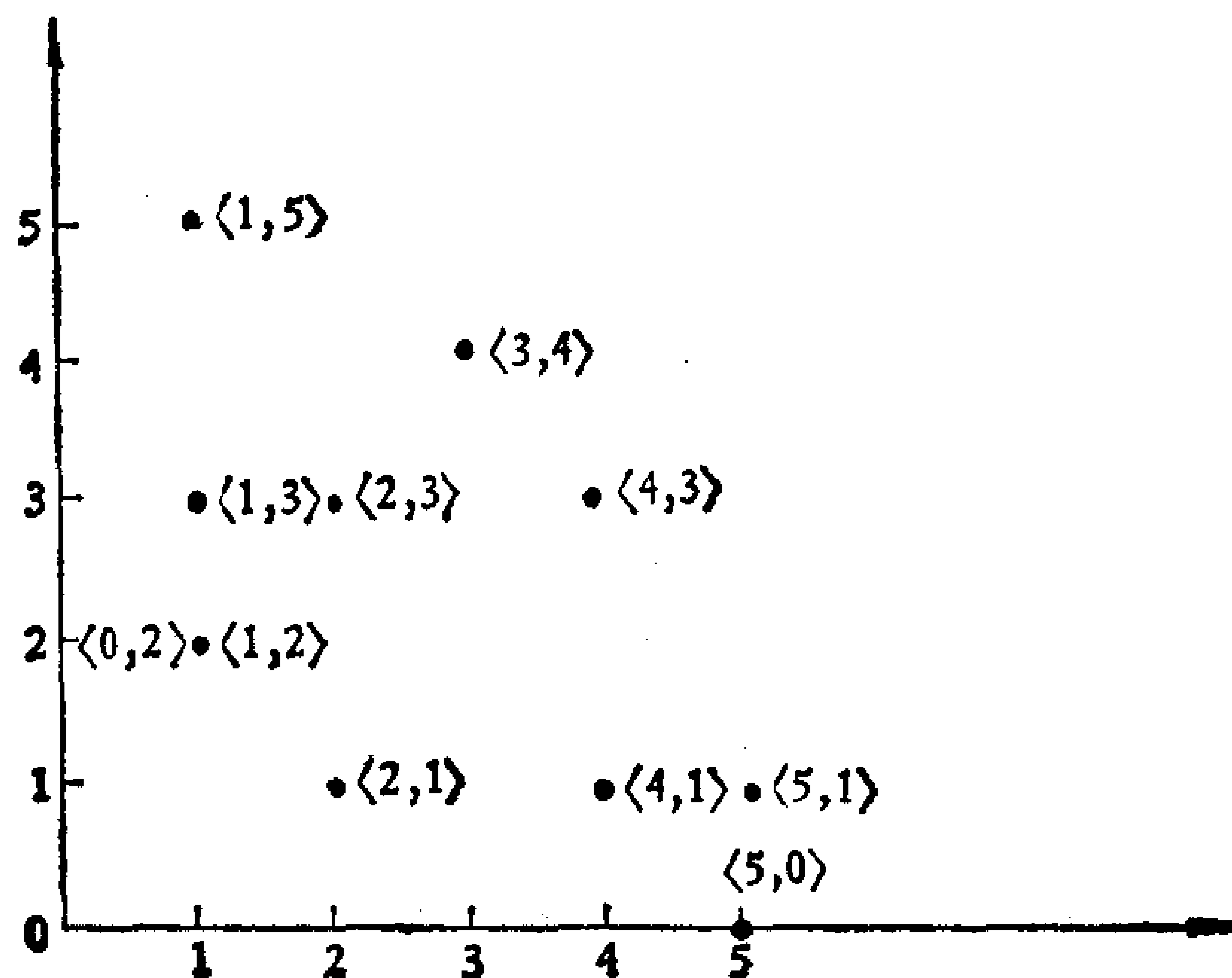


图 2　R 的坐标表示法

例 2　设 $S:=\{\varnothing, 1, 2\}$，$P(S)$ 上的真包含关系为 R，或写作如下

$$\{\langle\varnothing,\{\varnothing\}\rangle,\langle\varnothing,\{1\}\rangle,\langle\varnothing,\{2\}\rangle,\langle\varnothing,\{\varnothing,1\}\rangle,\langle\varnothing,\{\varnothing,2\}\rangle,\langle\varnothing,\{1,2\}\rangle,\langle\varnothing,\{\varnothing,1,2\}\rangle,\langle\{\varnothing\},\{\varnothing,1\}\rangle,\langle\{\varnothing\},\{\varnothing,2\}\rangle,\langle\{1\},\{\varnothing,1\}\rangle,\langle\{1\},\{1,2\}\rangle,\langle\{2\},\{\varnothing,2\}\rangle,\langle\{2\},\{1,2\}\rangle,\langle\{\varnothing\},\{\varnothing,1,2\}\rangle,\langle\{1\},\{\varnothing,1,2\}\rangle,\langle\{2\},$$

$\{\varnothing, 1, 2\}\rangle, \langle\{\varnothing, 1\}, \{\varnothing, 1, 2\}\rangle,$

$\langle\{\varnothing, 2\}, \{\varnothing, 1, 2\}\rangle, \langle\{1, 2\}, \{\varnothing, 1, 2\}\rangle\}.$

并且可用图 3 表示这一关系 R，从下至上，凡有直接或间接的有向连线的都具有真包含关系.

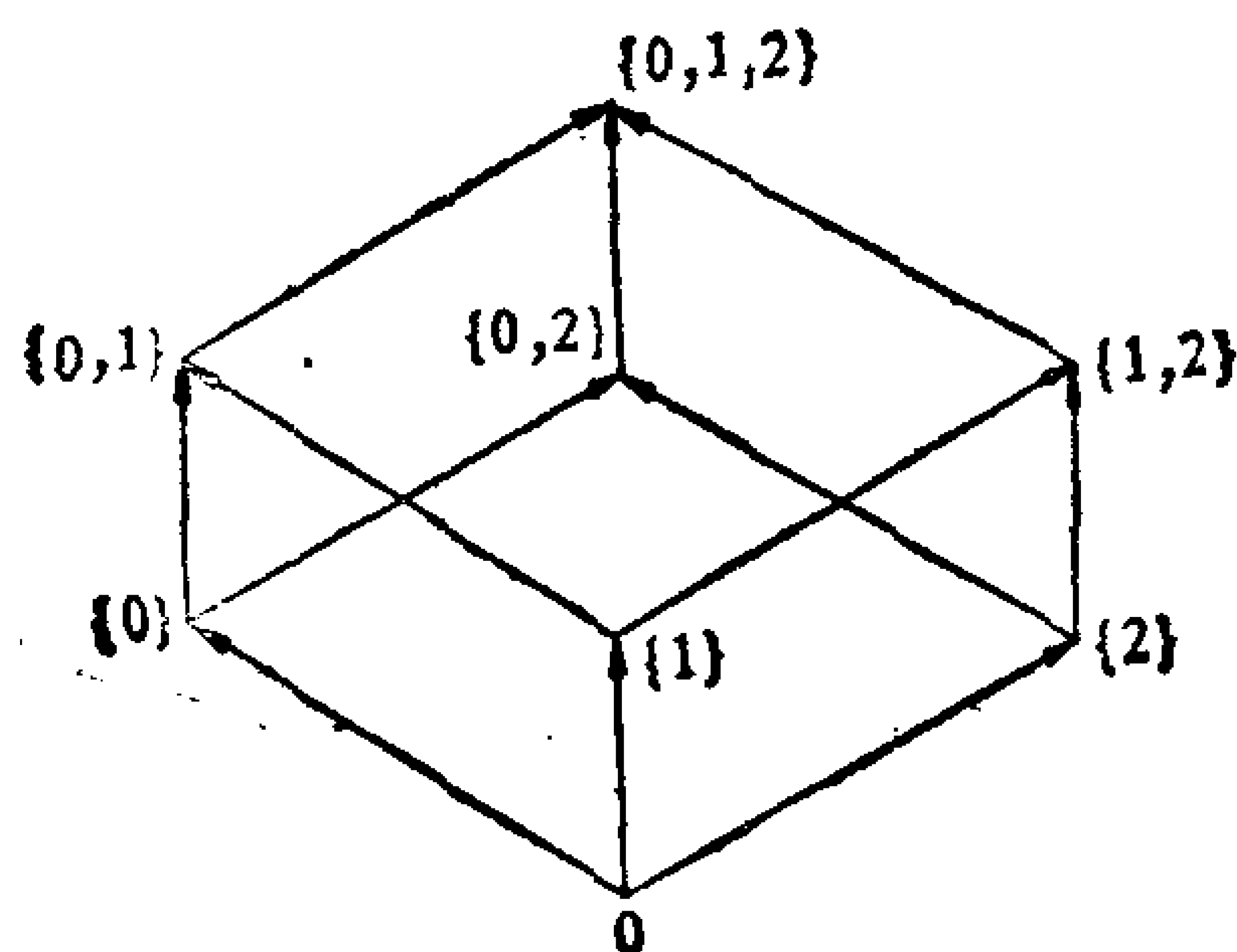


图 3 $P(3)$ 上的真包含关系

这两个例子说明，有些关系用图形来表示是很方便的，但是，对于某些关系，是不可能用有穷图形来表示的，为此，我们需要引进关系的第三种直接表示方法，即用条件表示法或称公式表示法，也就是用一公式或一条件刻划一关系. 例如 $\omega\times\omega$ 就是一关系，而且我们无法用有穷图形来描述它，为了具体起见，我们再引进一些关系的例子.

例 3 ω 上的严格整除的关系 R，亦即

$$R:=\{\langle x, y\rangle \mid x\in\omega \wedge y\in\omega$$
$$\wedge \exists z\in\omega(1<z\wedge y=x\cdot z)\}.$$

显然 $R\subset\omega\times\omega$，并且是一无穷集合，无法枚举或图示. 这时可用条件表示法描述它，当然，它的任意有穷部分总是可

以用前两种方法描述的. 在不引起误解时，有时把R写做符号$|_{\omega}$.

例 4　R仍是例 3 中的ω上的严格整除关系，我们用枚举法和图形法描述集合

$$S:=\{2,3,5,6,7,10,14,15,21,30,35,42,70,105,210\}$$

上所有满足关系R的有序对的构成的关系R_1为:

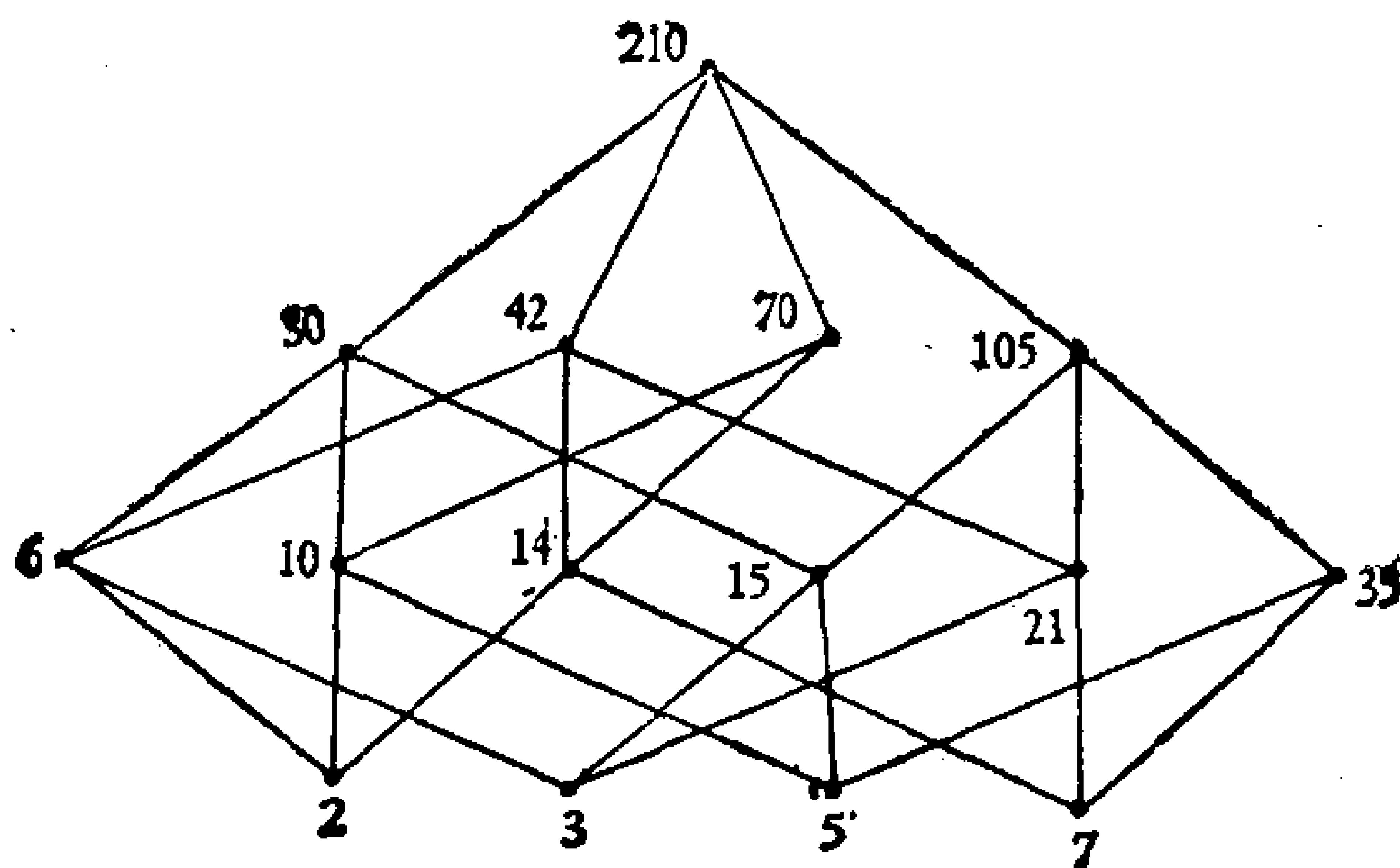


图 4　S上的严格整除关系

读者自己可以枚举图 4 这一关系的元素. 不难看出这一关系是$R_1=R\cap(S\times S)$.

我们现在来描述关系的矩阵表示法，令

$$S_1=\{x_0,\cdots,x_n\},\quad S_2=\{y_0,\cdots,y_m\},$$

R为S_1到S_2的一个关系，其中S_1与S_2虽为无序的有穷集合，但我们为了描述的有条理，假设它们的元素已用自然数编了号，令

$$K_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当 } \langle x_i, y_j\rangle\in R \text{ 时}\\ 0 & \text{其它情况.}\end{cases}$$

于是我们可用下述$n\times m$的矩阵 $M(R)$ 表示这一关系R.

$$\begin{pmatrix}K_{00} & K_{01} & K_{02} & \cdots & K_{0m}\\ K_{10} & K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ K_{n0} & K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nm}\end{pmatrix}.$$

有时，也把上述矩阵简写为 $(K_{ij})_{n\times m}$，并称它为R的关系矩阵. 当$m=n$时就写为 $(K_{ij})_{n\times n}$.

例 5 令 $S_1=\{x_0, x_1, x_2\}$, $S_2=\{y_0, y_1\}$,

$$R=\{\langle x_0, y_1\rangle, \langle x_1, y_0\rangle, \langle x_2, y_0\rangle, \langle x_2, y_1\rangle\}.$$

这时，表示它的关系矩阵为

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

用关系矩阵表示关系有时易于直观地表明一关系的特征. 我们将在第十一章中讨论关系的性质时继续讨论关系矩阵和关系的其它表示方法.

§4 关系的逆、复合、限制和象

定义 9.3 对于任意的关系 R, S 和任意的集合 u，我们令:

(1) R的逆 R^{-1}:

$$R^{-1}:=\{\langle x, y\rangle|\langle y, x\rangle\in R\}.$$

(2) R与 S 的复合 $R\circ S$:

$R\circ S := \{\langle x, y\rangle \mid \exists z(\langle x, z\rangle \in S \wedge \langle z, y\rangle \in R)\}$.

(3) R对 u 的限制 $R\upharpoonright u$:

$R\upharpoonright u := \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \wedge x \in u\}$.

(4) R在 u 下的象 $R[u]$:

$R[u] := \mathrm{ran}(R\upharpoonright u) = \{y \mid \exists x \in u R(x, y)\}$.

定理 9.4 对于任意关系 R, S 和任意的集合 u, 上述定理的逆、复合、限制和象都是存在唯一的,并且逆、复合和限制仍是关系.

为了简化我们的证明,对任意的公式(条件) $A(x)$, 我们称它所定义的类,或称条件 $A(x)$ 定义的类为:

$$A := \{x \mid A(x)\}, \tag{9.5}$$

也就是满足条件 $A(x)$ 的所有 x 组成的类.

证明 由上述说明和定义 9.3, R^{-1}, $R\circ S$, $R\upharpoonright u$ 和 $R[u]$ 都是可定义类,由分离公理,如果它们能够分别包含在一些集合之中,也就证明了相应集合的存在性,由外延公理即得唯一性. 现在我们给出相应的集合

(1) $R^{-1}\subset \mathrm{ran}(R)\times \mathrm{dom}(R)$

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R^{-1} &\longleftrightarrow \langle y, x\rangle \in R\\ &\rightarrow y \in \mathrm{dom}(R) \wedge x \in \mathrm{ran}(R)\\ &\rightarrow \langle x, y\rangle \in \mathrm{ran}(R)\times \mathrm{dom}(R),\end{aligned}$$

(2) $R\circ S\subset \mathrm{dom}(S)\times \mathrm{ran}(R)$

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R\circ S &\longleftrightarrow \exists z(\langle x, z\rangle \in S \wedge \langle z, y\rangle \in R)\\ &\rightarrow x \in \mathrm{dom}(S) \wedge y \in \mathrm{ran}(R)\end{aligned}$$

$$\rightarrow \langle x,y\rangle \in \mathrm{dom}(S)\times \mathrm{ran}(R),$$

(3) $R\upharpoonright u\subset R$

$$\langle x,y\rangle \in R\upharpoonright u \longleftrightarrow \langle x,y\rangle \in R\wedge x\in u$$
$$\rightarrow \langle x,y\rangle \in R,$$

(4) $R[u]\subset \mathrm{ran}(R)$

$$y\in R[u] \longleftrightarrow \exists x\in u(\langle x,y\rangle \in R)\rightarrow y\in \mathrm{ran}(R).$$

这就完成了定理 9 4 的证明.

定理 9.5 若 R 是一关系,那么

(1) $\mathrm{dom}(R^{-1})=\mathrm{ran}(R)$,

(2) $\mathrm{ran}(R^{-1})=\mathrm{dom}(R)$,

(3) $(R^{-1})^{-1}=R$,

(4) $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$.

证明 (1)与(2)的证明是直接的,仅证明(3)和(4),先证(3): 设 x, y 为任意的集合,我们有:

$$\langle x,y\rangle \in (R^{-1})^{-1} \longleftrightarrow \langle y,x\rangle \in R^{-1} \longleftrightarrow \langle x,y\rangle \in R.$$

再证(4)

$$\langle x,y\rangle \in (R\circ S)^{-1} \longleftrightarrow \langle y,x\rangle \in R\circ S$$
$$\longleftrightarrow \exists z(S(y,z)\wedge R(z,x))$$
$$\longleftrightarrow \exists z(R^{-1}(x,z)\wedge S^{-1}(z,y))$$
$$\longleftrightarrow \langle x,y\rangle \in S^{-1}\circ R^{-1}.$$

证毕

当我们用公式 $Re(x)$ 表示 x 是一关系时,那么,我们自然有 $Re(x)\rightarrow Re(x^{-1})$, $Re(x)\wedge Re(y)\rightarrow Re(x\circ y)$ 和

$$\forall x\forall y(Re(x)\rightarrow Re(x\upharpoonright y))$$

等等。

习　　题

1. 令 R 是 $\{\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，计算 $R\circ R$，$R\restriction\{1\}$，$R^{-1}\restriction\{1\}$，$R[\{1\}]R^{-1}$ 和 $[\{1\}]$.

2. 令 $R=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 2,0\rangle\}$，
求 $R\restriction\{\varnothing\}$,$R[\varnothing]$，$R[\{\varnothing\}]$，$R[\{\varnothing,\{\varnothing\}\}]$，$R\circ R^{-1}$，$R^{-1}\circ R$，$R\circ R$，$R\restriction\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，$\bigcup\bigcup R$.

3. 证明：对于任意关系 R_1,R_2,R_3，我们有

$$(R_1\circ R_2)\circ R_3=R_1\circ(R_2\circ R_3).$$

4. 证明：对于任意关系 R_1，R_2 和任一集合 S_1，S_2，都有

(1) $S_1\subset S_2\rightarrow R_1[S_1]\subset R_1[S_1]$，

(2) $(R_1\circ R_2)[S_1]=R_1(R_2[S_1])$，

(3) $R_1\restriction(S_1\cup S_2)=R_1\restriction S_1\cup R_1\restriction S_2$.

§5　函　　数

对于关系我们再考察两个例子：

例1　令

$$R:=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle\langle 4,5\rangle,\langle 5,10\rangle,\langle 6,12\rangle,\langle 7,14\rangle\},$$

这样 $\mathrm{dom}(R)=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$，$\mathrm{ran}(R)=\{1,2,3,4,5,10,12,14\}$，由图5可以清楚地看出，这一关系不象图1中所描述的那样，那里定义域中一个点可以生出许多射线，这里没有这种现象，这里定义域中每一点仅对应于值域中一个点。

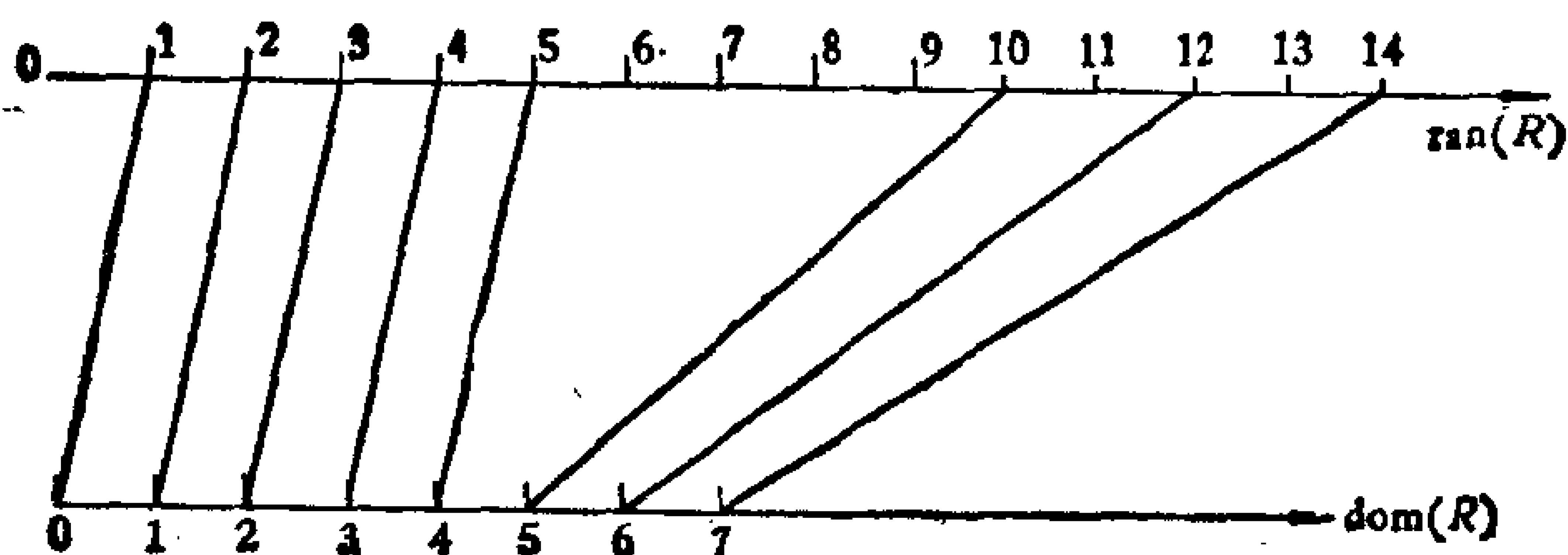


图 5

例 2 令 $R:=\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$. 这样，$\text{dom}(R)=4$，$\text{ran}(R)=2$，由图 6 看出这一例子是关系的定义域中任一点仅对应于值域中一个点，反之不然。

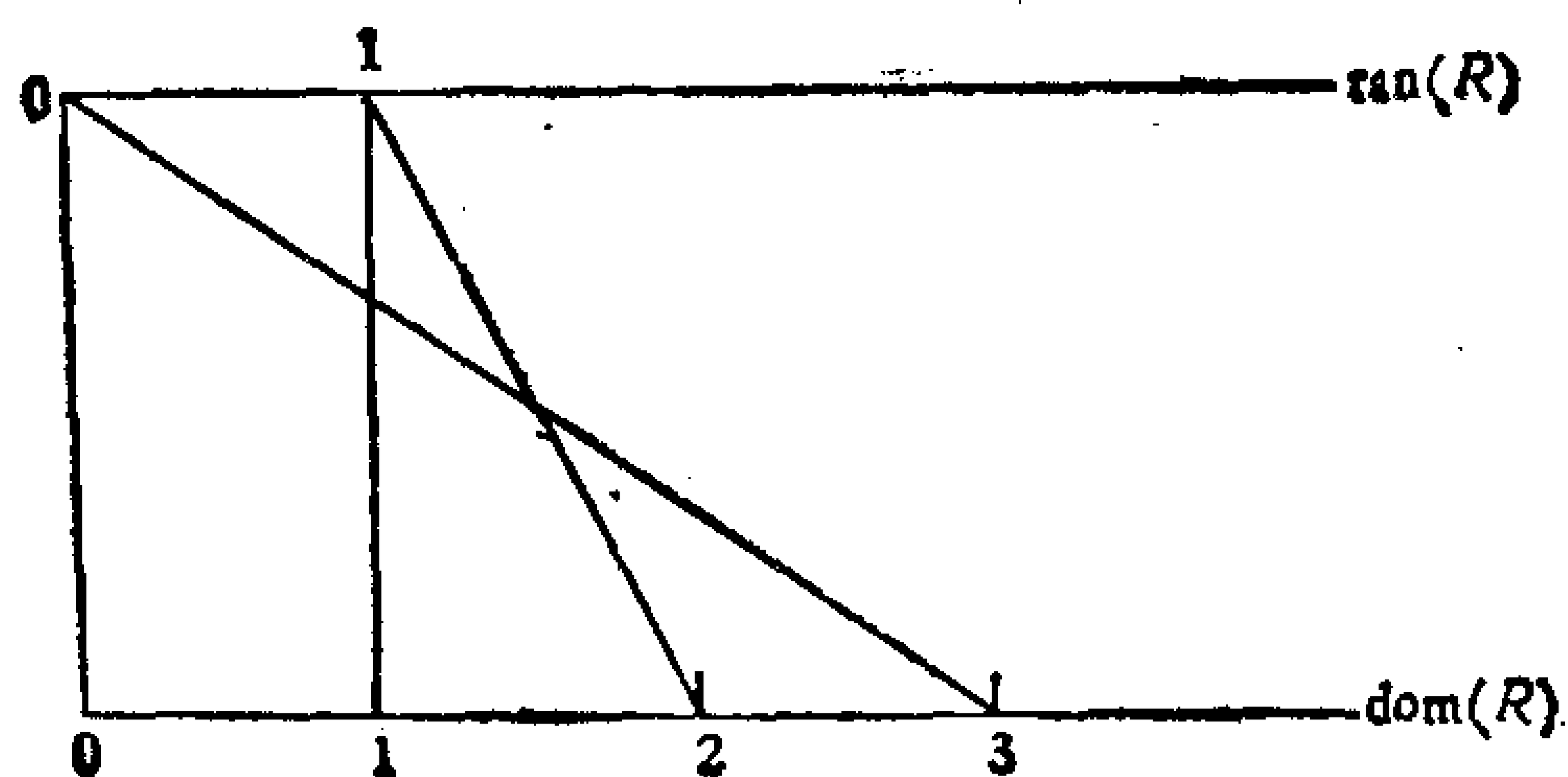


图 6

上述这两个关系有一个共同的特点就是它们的定义域中任一点仅引出一条射线，或者说，它们的定义域中任一元素至多对应于值域中的一个元，这就是我们通常说函数的共性。

定义 9.4 一个关系 R，如果满足条件

$$\forall x\forall y\forall z(R(x,y)\wedge R(x,z)\rightarrow y=z),$$

我们就称 R 为一函数.

换句话说，一关系 R 是一函数，它就必须满足这样的条

件，对于任一 $x\in \mathrm{dom}(R)$，都是：

$$\exists!\, yR(x,y)$$

成立，其中 $\exists!\, yR(x,y)$ 定义为

$$\exists y(R(x,y)\wedge\forall z(R(x,z)\to z=y)).\qquad(9.6)$$

由定义 9.4，不难验证例 1 和例 2 中的关系都是函数，并且设 $g\subset f$，已知 f 是一函数，则 g 也是一函数，特别地 $\varnothing$ 也是函数，处处无定义的函数。

函数具有单值性而关系不一定满足单值性，所以，函数是一类特殊的关系，从而也是一类特殊的集合。本书中，我们常用 f，g 或加下标表示某一函数，并且当 $x\in \mathrm{dom}(f)$ 时，$f(x)$ 就表示函数 f 在 x 点所对应的值，即 $\langle x, f(x)\rangle\in f$。

f 是一函数并且 S_1 与 S_2 分别为二集合时，记号 $f:S_1\to S_2$ 表示 $S_1=\mathrm{dom}(f)$，$\mathrm{ran}(f)\subset S_2$。

例 1 与例 2 比较，例 1 中的函数又有它的特殊性，这种特殊的函数对我们也很有用，为此我们引入定义。

定义 9.5 对于一函数 $f:S_1\to S_2$，如果它满足条件

$$\forall x_1\in S_1\forall x_2\in S_1(x_1\neq x_2\to f(x_1)\neq f(x_2)),$$

则称函数 f 是内射的（亦称单射的）。

也就是说，对于内射函数 f，$\mathrm{ran}(f)$ 中任一个点 y，只能有 S_1 中一个点 x，使得 x 在 f 下映射到 y 点，例 1 是一内射函数，例 2 不是一内射函数，内射函数有时也称为一对一的函数。

对函数 f 而言，在定义中我们仅要求 $\mathrm{ran}(f)\subset S_2$。当 $\mathrm{ran}(f)=S_2$ 时又是一类特殊的函数。

例 3 $S := \{\langle x, x^+\rangle \mid x \in \omega\}$ 这一函数常常称为后继函数，有时人们也写作 x^+（或 x' 或 $x+1$）。

例 4 对于任意的自然数 a 和 n，我们有一 n 元常函数 f

$$f := \{\langle\langle x_1, \cdots, x_n\rangle, a\rangle \mid x_1, \cdots, x_n \in \omega\},$$

即：

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a.$$

例 5 对于任意的自然数 n 和 i，$i \leqslant n$，我们都有一函数 f

$$f := \{\langle\langle x_1, \cdots, x_n\rangle, x_i\rangle \mid x_1, \cdots, x_n \in \omega \wedge i \leqslant n\},$$

即

$$f(x_1, \cdots, x_n) = x_i.\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

例 6 已知函数 $h: \omega \to \omega$，和 $g: \underbrace{\omega \times \cdots \times \omega}_{n次} \to \omega$，我们令：

$f := \{\langle\langle x_1, \cdots, x_n\rangle, y\rangle \mid$ 有 z，$\langle x_1, \cdots, x_n, z\rangle \in g \wedge \langle z, y\rangle \in h\}$.

这样就获得一新的函数 f，使得：

$$f(x_1, \cdots, x_n) = h(g(x_1, \cdots, x_n)).$$

在中学数学课程和大学数学课程中都有大量的函数的例子，读者可以回顾那些函数的例子，进一步理解有关函数的概念。

§6 函数的性质、选择公理

定义 9.6 对于一函数 $f:S_1\to S_2$，并且满足条件

$$\operatorname{ran}(f)=S_2,$$

即对于任一 $y\in S_2$，都有一 $x\in S_1$，使得 $y=f(x)$，我们就称函数 f 是满射的.

满射函数主要和给定的集合 S_2 有关，任一函数 f，当我们取 $S_2=\operatorname{ran}(f)$ 时，它总是满射的，反之任一函数 f，我们总有 $\operatorname{ran}(f)$ 的真包集合 S_2，即 $\operatorname{ran}(f)\subset_{+}S_2$. f 对 S_2 而言就不是满射的.

定义 9.7 对于一函数 $f:S_1\to S_2$，如果它既是内射的，又是满射的，就称函数 f 对 S_1 与 S_2 而言是双射的.

当 f 为一函数时，它的逆不一定是一个函数，如把例 2 中所定义的函数记做 f，则 f^{-1} 就不是一函数，因为 $\langle 0,0\rangle\in f^{-1}$，$\langle 0,3\rangle\in f^{-1}$.（当然 $\langle 1,1\rangle\in f^{-1}$，$\langle 1,2\rangle\in f^{-1}$），这就违背了定义 9.4 中关于函数的条件.

定理 9.6 如果 f 是一内射函数，则 f 的逆 f^{-1} 是以 $\operatorname{ran}(f)$ 为定义域的一函数.

这一定理的证明是从定义 9.5 和定义 9.4 直接获得的.

定理 9.7 若 $f:S_1\to S_2$ 是一双射函数，那么，$f^{-1}:S_2\to S_1$ 也是一双射函数.

证明 如果不是一双射函数，那么存在 $y_1\neq y_2$，$y_1\in S_2$，$y_2\in S_2$，使得 $f^{-1}(y_1)=f^{-1}(y_2)=x$，由定义 9.3，就有

$$f(x)=y_1 \quad 和 \quad f(x)=y_2,$$

并且 $y_1 \neq y_2$，这与 f 是一函数的定义相矛盾，定理得证.

定理 9.8 假定函数 f 是一内射的，若 $x \in \mathrm{dom}(f)$ 则

$$f^{-1}(f(x))=x,$$

若 $y \in \mathrm{ran}(f)$，则 $f(f^{-1}(y))=y$.

证明 设 $x \in \mathrm{dom}(f)$，从而 $\langle x, f(x)\rangle \in f$，故

$$\langle f(x), x\rangle \in f^{-1}, \text{ 即 } f(x) \in \mathrm{dom}(f^{-1}),$$

且由此得到

$$f^{-1}(f(x))=x.$$

设 $y \in \mathrm{ran}(f)$，由于 f 为内射函数，有唯一的 x，使得 $\langle x, y\rangle \in f$，从而 $\langle y, x\rangle \in f^{-1}$，并且

$$f^{-1}(y)=x, \quad f(f^{-1}(y))=y.$$

定理 9.9 如果 f, g 都是函数，那么它们的复合也是一函数，其定义域

$$\mathrm{dom}(f\circ g)=\{x \mid x \in \mathrm{dom}(g) \wedge g(x) \in \mathrm{dom}(f)\}, \quad (9.7)$$

而且对于任一 $x \in \mathrm{dom}(f\circ g)$，我们有

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)). \quad (9.8)$$

证明 首先，我们直观地说明定理的含义，如图 7 所示，$g: S_1 \rightarrow S_2$, $f: S_2 \rightarrow S_3$. 并且 $\mathrm{dom}(f) \subset S_2$，当然可能有 x_3，使得 $g(x_3) \notin \mathrm{dom}(f)$，这时 $(f\circ g)$ 无定义，而对于 $x_2 \in \mathrm{dom}(g)$，且 $g(x_2) \in \mathrm{dom}(f)$，这时，若 $g(x_2)=y_2$，并且 $f(y_2)=z_2$ 时，我们就有 $(f\circ g)(x_2)=z_2$.

先证 $f\circ g$ 是一函数. 假定不然，就有集合 x, z_1, z_2 且 $z_1 \neq z_2$ 使得 $\langle x, z_1\rangle \in f\circ g$, $\langle x, z_2\rangle \in f\circ g$. 因此，就有 y_1, y_2 使

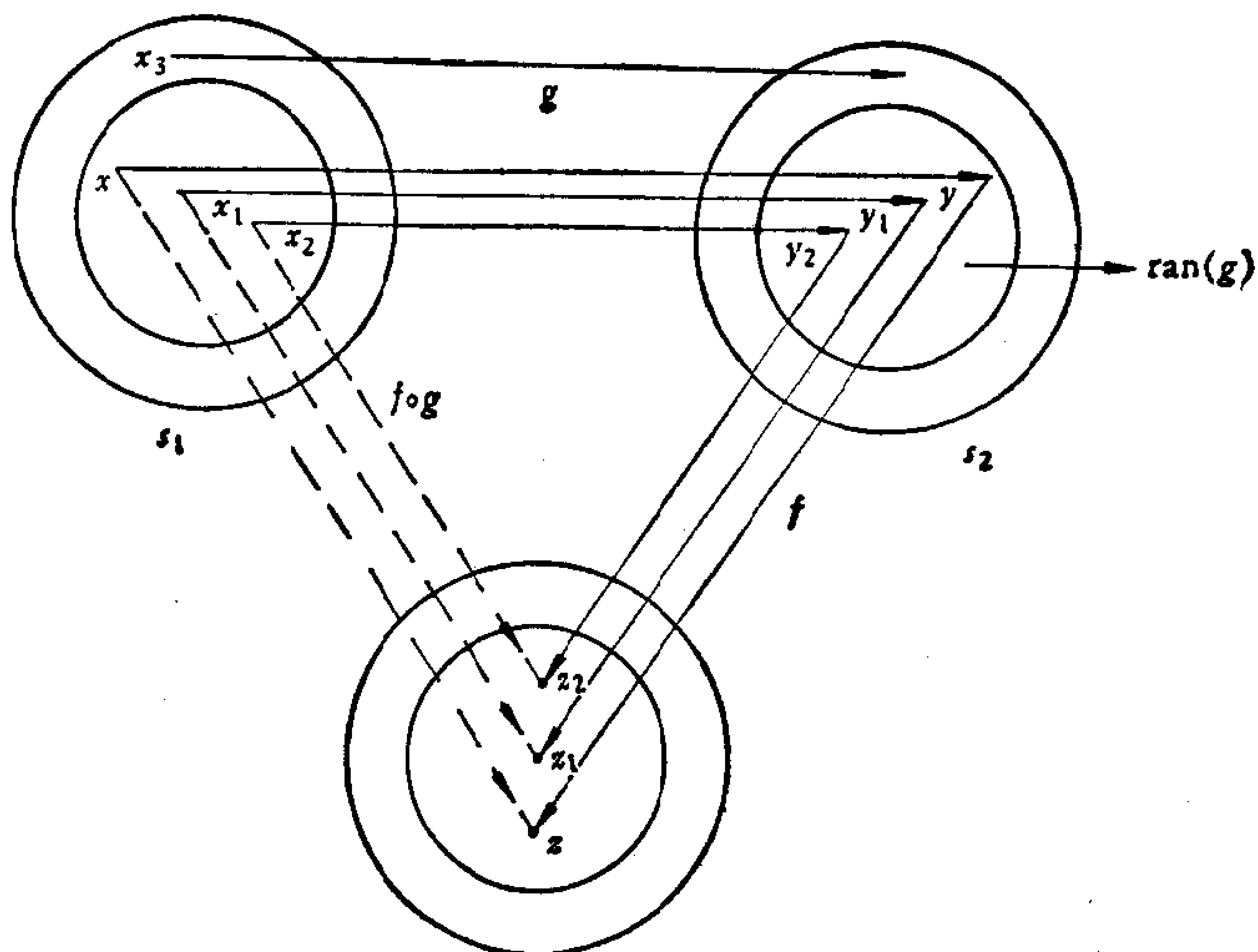


图7　函数复合示意图

得 $f(y_1)=z_1$，$f(y_2)=z_2$，并且 $\langle x, y_1\rangle \in g$，$\langle x, y_2\rangle \in g$，由于 g 为一函数，故 $y_1=y_2$。又由于 f 为一函数，故 $z_1=z_2$。因此，z_1 与 z_2 不能有 $z_1 \neq z_2$，所以 $f \circ g$ 是一函数。

再设 $x \in \mathrm{dom}(f \circ g)$，因此，对于某些 y，z 有 $g(x)=y$ 和 $f(y)=z$。即 $x \in \mathrm{dom}(g)$，$y=g(x) \in \mathrm{dom}(f)$ 并且

$$z=f(g(x)).$$

在上述定理中，如果令 g 为内射的，并令 f 取作 g^{-1}，则有 $(g^{-1} \circ g)(x)=g^{-1}(g(x))=x$，且 $\mathrm{dom}(g^{-1} \circ g)=\mathrm{dom}(g)$。

定理 9.10　若 f 是一函数，u 是一集合，则 $f \upharpoonright u$ 是一定义域为 $(\mathrm{dom}(f)) \cap u$ 的一函数。

证明 设 x 为任一集合且 $x \in \mathrm{dom}(f \upharpoonright u)$，由定义就有唯一的 y，使得：

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle \in f \upharpoonright u &\longleftrightarrow \langle x, y\rangle \in f \wedge x \in u \\ &\longleftrightarrow x \in \mathrm{dom}(f) \wedge x \in u \\ &\longleftrightarrow x \in \mathrm{dom}(f) \cap u. \end{aligned}$$

由上式欲证结果成立.

定义 9.8 对于任意集合 S，函数 f 使得 $f: S \to S$，如果 $\mathrm{dom}(f) = S$ 并且当 $x \in S$ 都满足 $f(x) = x$. 就称 f 为 S 上的恒等函数，并且常常记作 I_s.

定理 9.11 假定 $f: S_1 \to S_2$，且 S_1 非空，那么，我们有：

(1) 存在一个函数 $g: S_2 \to S_1$（"左逆"），使得 $g \circ f$ 为 S_1 上的恒等函数 I_{s_1}，当且仅当函数 f 为内射的.

(2) 存在一个函数 $h: S_2 \to S_1$（"右逆"），使得 $f \circ h$ 为 S_2 上的恒等函数 I_{s_2}，当且仅当函数 f 为 S_1 与 S_2 的满射函数.

证明 先证 (1)，假定有一个左逆函数 g，即 $g \circ f = I_{s_1}$. 如果 $f(x) = f(y)$，那么我们有：

$$g(f(x)) = g(f(y)),$$

因此，$x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$，也就是说，
我们有：

$$f(x) = f(y) \to x = y,$$

因而函数 f 是内射的.

反之，假定函数 f 是内射的，那么 f^{-1} 就是一个定义域为 $\mathrm{ran}(f)$，值域为 S_1 的函数，现在由于 S_1 非空，所以可从中取一固定的元素 c，这样，我们定义函数 g 如下：

$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & 当\ x \in \mathrm{ran}(f) \\ c & 当\ x \in (S_2 \dot{-} \mathrm{ran}(f)). \end{cases}$$

这样，g 就是如下的函数：

$$g: = f^{-1} \cup (S_2 \dot{-} \mathrm{ran}(f)) \times \{c\}. \qquad (9.9)$$

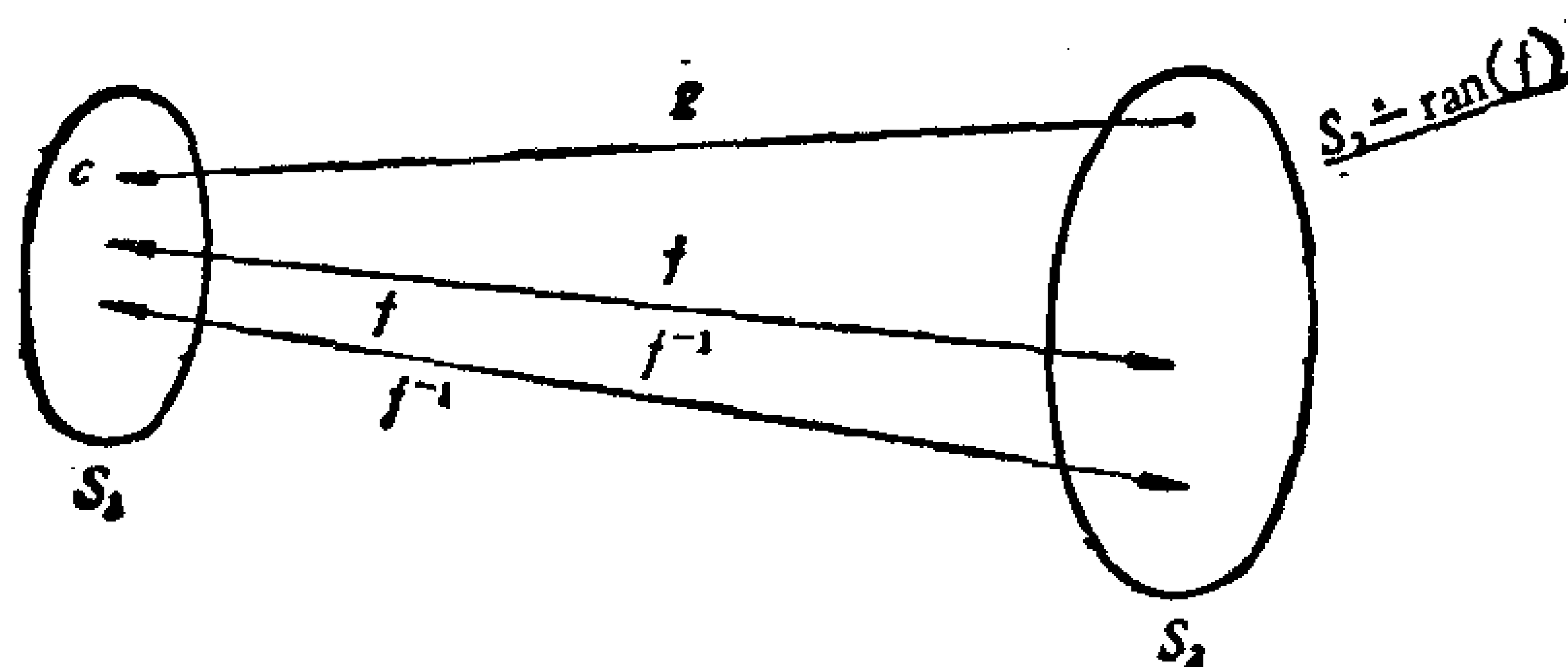


图 8　左逆函数

由图 8 可知 g 的这种选择的目的是使它把 S_2 映射到 S_1，$\mathrm{dom}(g \circ f) = S_1$，并且对于任意的 $x \in S_1$，都有

$$g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x,$$

因此，我们有：

$$g \circ f = I_{S_1}.$$

再证(2)，先证若存在一这样的右逆函数 h，即

$$f \circ h = I_{S_2}.$$

因此，对于任意的 $y \in S_2$，有 $y = f(h(y))$. 这样，

$$y \in \mathrm{ran}(f),$$

也就是说，对任一集合 y 我们有：

$$y \in S_2 \to y \in \mathrm{ran}(f).$$

所以，f 是由 S_1 到 S_2 的满射函数.

反过来，假定 f 为由 S_1 到 S_2 的一满射函数，也就是说，

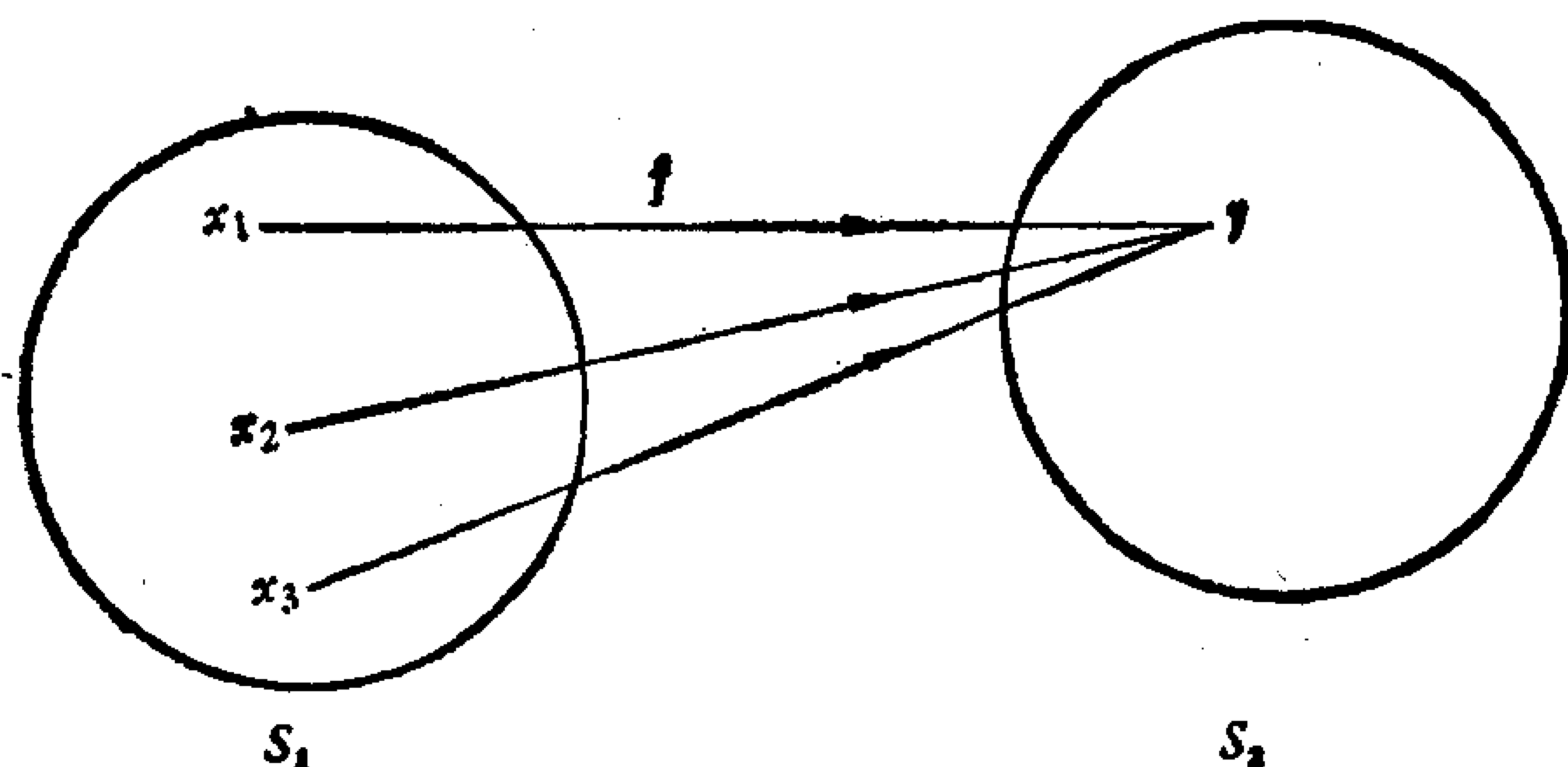


图 9

S_2 中任一点 y 都有 S_1 中的点映射到 y，我们并不知道是否仅有一点映射到 y. 直观上我们相信总能从这些点中找到一点 x 使之对应 y. 也就是说，虽然 f^{-1} 不一定是一函数(当然是一关系)，但总能找到一函数 h，使得

$$h \subset f^{-1}, \tag{9.10}$$

$$\text{dom}(h) = \text{dom}(f^{-1}). \tag{9.11}$$

但是前面的公理，没有一条可以保证通过选择的方法，构造函数 h 是合法的. 这种选择或者说满足条件(9.10)和(9.11)的 h 的存在性问题，是未陈述过的一条重要的基本原则——选择公理.

选择公理 (形式 I) 对于任意的一关系 R，存在一个函数 h 并满足条件: $h \subset R$ 和 $\text{dom}(h) = \text{dom}(R)$.

运用选择公理，我们现在继续证明上述定理的第二部分，我们选取函数 h，使得它满足公式(9.10)和(9.11)，那么，函数 h 就是对 S_2 中的任意 y，就选择了相适应的 x，即有，

$$\langle y, h(y) \rangle \in f^{-1},$$

因此 $\langle h(y), y \rangle \in f$，从而就有 $f(h(y)) = y$，即有:

$$f \circ h = I_{S_2}.$$

这就完成了定理 9.11 的证明.

选择公理，有时人们记做 AC，是一个重要的数学公理，本书中我们还要多次使用它去获得一些重要的概念和结果，也还要讨论它的有关等价形式.

习　　题

1. 假定 f 和 g 都是函数，证明
   $f \subset g \leftrightarrow \mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(g) \wedge \forall x \in \mathrm{dom}(f)(f(x) = g(x))$.
2. 假定 f 和 g 都是函数，若 $f \subset g$ 且 $\mathrm{dom}(g) \subset \mathrm{dom}(f)$ 则 $f = g$.
3. 证明：不存在一切函数都属于它的集合.

* §7　函数的相容性

现在我们来讨论函数相容性这一新概念.

定义 9.9　两个函数 f, g，如果对于所有的

$$x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g),$$

都有

$$f(x) = g(x)$$

成立，我们称 f 与 g 是相容的.

定义 9.10　令C为由某些函数组成的一集合，如果C中任意两个函数 f, g 都是相容的，我们就称C是相容的.

引理 9.1　两个函数 f, g 是相容的，当且仅当 $f \cup g$ 是一函数.

证明　首先假定函数 f, g 是相容的. 对于任一

$$x \in (\mathrm{dom}(f) \cup \mathrm{dom}(g)) \dot{-} (\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)),$$

这时总有

$$(x \in \mathrm{dom}(f) \wedge x \notin \mathrm{dom}(g))$$

或

$$(x \notin \mathrm{dom}(f) \wedge x \in \mathrm{dom}(g)),$$

对于 $x \in \mathrm{dom}(f) \wedge x \notin \mathrm{dom}(g)$，$(f \cup g)(x) = f(x)$ 即

$$\langle x, f(x) \rangle \in f \cup g,$$

并且对于任意 y，若 $y \neq f(x)$，都有 $\langle x, y \rangle \notin f \cup g$. 另一方面，若 $x \notin \mathrm{dom}(f) \wedge x \in \mathrm{dom}(g)$，类似有 $\langle x, g(x) \rangle \in f \cup g$，并且对于任意 z，若 $z \neq g(x)$，则有 $\langle x, z \rangle \notin f \cup g$. 当

$$x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(f),$$

由相容性，$f(x) = g(x)$，故 $\langle x, f(x) \rangle \in f \cup g$. 并且对于任一 u，若 $u \neq f(x) = g(x)$，则有 $\langle x, u \rangle \notin f \cup g$，所以这时 $f \cup g$ 为一函数.

其次，假定 $f \cup g$ 为一函数，并假定有一 x，使得

$$x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g),$$

且 $f(x) \neq g(x)$. 这样就有 $\langle x, f(x) \rangle \in f$，所以有

$$\langle x, f(x) \rangle \in f \cup g$$

且 $\langle x, g(x) \rangle \in g$，所以，有 $\langle x, g(x) \rangle \in f \cup g$，然而

$$f(x) \neq g(x),$$

这与 $f \cup g$ 一函数相矛盾. 因此，就有对于任一 x，当

$$x \in \mathrm{dom}(g) \cap \mathrm{dom}(f)$$

都有 $f(x) = g(x)$，所以 f 与 g 是相容的.

引理 9.2 函数 f，g 是相容的，当且仅当

$$f\upharpoonright(\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g))=g\upharpoonright(\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)).$$

引理 9.2 的证明是直接从定义 9.10 获得的.

定理 9.12 如果 C 是一相容的函数集合，且 $F:=\bigcup C$，则 F 是一函数，并且有

$$\mathrm{dom}(F)=\bigcup\{\mathrm{dom}(f)\mid f\in C\}.$$

证明 先证 F 是一关系，因为任一集合 u，若 $u\in\bigcup C$，则有一函数 f，使得 $f\in C$ 且 $u\in f$，由于 u 是函数 f 的一个元素，所以 u 是一有序对，这样 F 是一关系. 再证 F 是一函数，若有 x,y_1,y_2 使得 $\langle x,y_1\rangle\in F$，$\langle x,y_2\rangle\in F$，就有 $f_1,f_2\in C$，使得 $\langle x,y_1\rangle\in f_1$ 且 $\langle x,y_2\rangle\in f_2$. 但是由于 f_1 与 f_2 相容，并且

$$x\in\mathrm{dom}(f_1)\cap\mathrm{dom}(f_2),$$

所以有

$$y_1=f_1(x)=f_2(x)=y_2.$$

最后是关于定义域的证明，对于任一集合 x，若

$$x\in\mathrm{dom}(F),$$

故有一 y，使得 $\langle x,y\rangle\in F$，即 $\langle x,y\rangle\in\bigcup C$，这样，有一

$$f\in C,\ \langle x,y\rangle\in f,$$

因此 $x\in\mathrm{dom}(f)$，所以 $x\in\bigcup\{\mathrm{dom}(f)\mid f\in C\}$. 由此，

$$\mathrm{dom}(F)\subset\bigcup\{\mathrm{dom}(f)\mid f\in C\}.$$

反之，对于任一集合 x，若 $x\in\bigcup\{\mathrm{dom}(f)\mid f\in C\}$，这时，就一定有一 $f\in C$，使得 $x\in\mathrm{dom}(f)$，因此，有一 y，使得

$$\langle x,y\rangle\in f.$$

所以 $\langle x,y\rangle\in\bigcup C$，即 $\langle x,y\rangle\in F$，由此，$x\in\mathrm{dom}(F)$. 这样，就有：$\bigcup\{\mathrm{dom}(f)\mid f\in C\}\subset\mathrm{dom}(F)$. 综上，我们有

$$\mathrm{dom}(F)=\bigcup\{\mathrm{dom}(f)\mid f\in C\}.$$

由上述三方面，我们就完成了欲证结果。

定理 9.12 告诉我们，从相容的函数集合能够构造出一个新的函数，这一函数开拓了此集合 C 内的所有的已知函数。

第十章　自然数的函数、递归定理

本章讨论自然数的某些常用的函数．递归定理保证了构造某类自然数函数的合法性．本章的内容可以看成上一章的特例，但具有独特的意义，某些典型的例子对于数学基础研究和计算机科学都是有用的．

§1　有穷集合上的函数与抽屉原理

在本节我们令有穷集合满足 $s_1 \subset \omega$ 且 $s_2 \subset \omega$，即集合 s_1 与 s_2 为二自然数的有穷集合．我们来讨论定义域是 s_1，值域在 s_2 中的函数．亦即当我们令 f 为：

$$f:\ s_1 \to s_2 \tag{10.1}$$

时，$\mathrm{dom}(f) = s_1 \subset \omega$，$\mathrm{ran}(f) \subset \omega$．对于这类函数，我们以 $s_1 = 2$，$s_2 = 2$ 为例，可以看出下述四个关系

$$f \subset 2 \times 2 \ (i = 0, 1, 2, 3)$$

都是所要求的函数：

$$f_0 := \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 0\rangle\},$$

$$f_1 := \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle\},$$

$$f_2 := \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\},$$

$$f_3 := \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle\}.$$

这四个函数用图形表示分别是

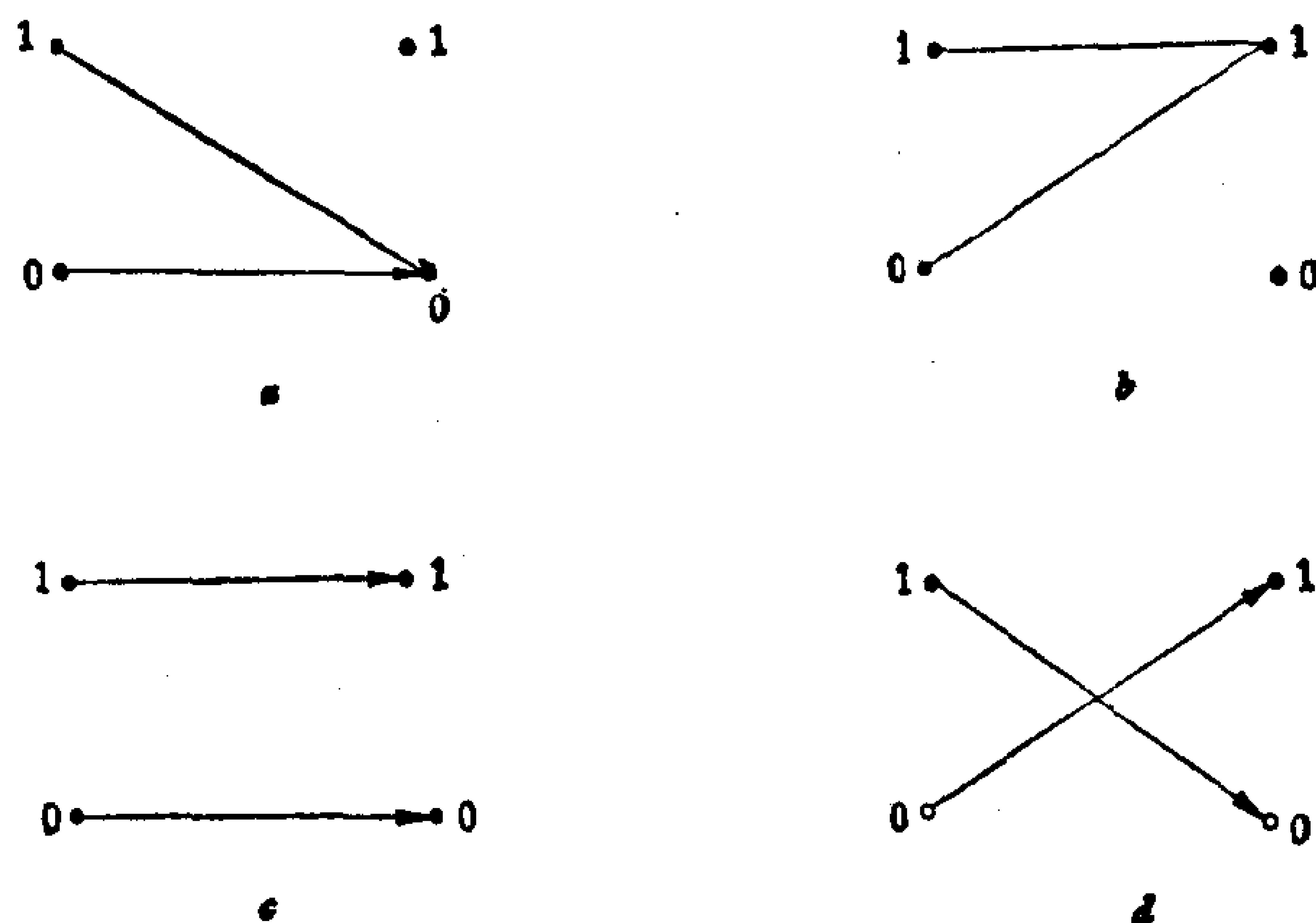


图 1　函数 f:2→2 的图形

本书所说的函数都是单值的，也就是说，由定义域一个元只能引出一条射线连接于值域中的某一个点，而且定义域每一点都必须有一条线连接于值域中某一点．这一事实可以推导出许多有趣的结果．例如，由 (10.1)，我们可知：s_1 的元素的数目一定不少于集合 $\mathrm{ran}(f)$ 的元素的数目．这一有趣的结论常被称之为抽屉原理或鸽巢原理，有着很广泛的应用．

抽屉原理 (I)　对于任意的有穷集合 s_1 与 s_2，若 $\bar{\bar{s}}_2 < \bar{\bar{s}}_1$，且 $f: s_1 \to s_2$，则有 $a \in s_1$，$b \in s_1$，$a \neq b$，使得

$$f(a) = f(b).$$

以后我们还要陈述和应用抽屉原理的其它形式．使用抽屉原理 (I) 我们立即可以看出：13 个人中至少有二人是同月份出生的；把十个苹果放到九个抽屉中去，无论怎样放法，这

九个抽屉中一定至少有一个抽屉中放了两个或多于两个的苹果；370 名已满六周岁但不到七周岁的儿童中，至少有两个儿童是同年、同月、同日出生；假定一个人的头发的根数不会超过二十万，如果某城市有二十余万人，那么这一城市内至少有两个人的头发根数相同. 有些问题，表面上不能一下子从抽屉原理获得结论，但只要稍作分析，即可用它获得所有结果.

例 1 任意放入一正三角形内五个点，证明至少有两个点它们之间的距离不大于该正三角形边长的一半.

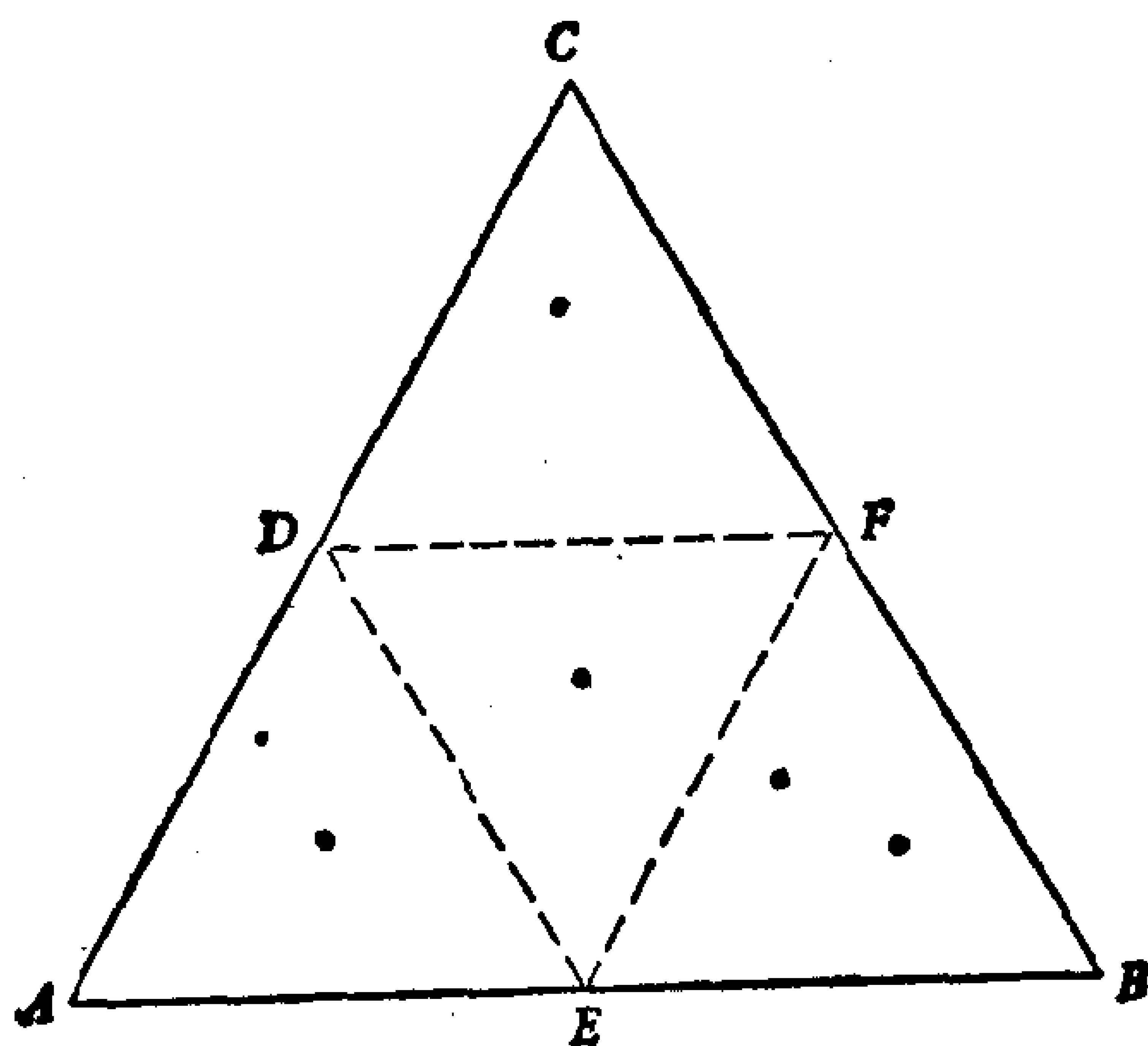


图 2

证明 如图 2 所示，将正三角形 ABC 各边的中点间连线，形成四个小正三角形，它们的边长为原来边长的一半，由抽屉原理 (I)，至少有两个点在同一个小三角形内或边上. 由几何学可知任一正三角形内或边上的两个点，它们的距离不超过同一正三角形的边长，就获得了欲证结果.

例 2 某学生规定他在暑期 45 日中每天至少做一道数学题，所做数学的总数不超过 72 道题，试证明，无论他怎样安排，总有连续的几天时间，在这段时间内他恰好要做 17 道数学题.

证明 设 n_1 为该生第一天做数学的数目，n_2 为该生前两天所做的数学题的数目，一般说，n_i 为该生前 i 天所做的数学题的数目. n_{45} 就是该生前 45 天所做的数学题的数目，也就是他整个暑期所做的数学题的数目. 这样，我们有:

$$1 \leqslant n_i \leqslant 72, \quad i = 1, 2, \cdots, 45. \qquad (10.2)$$

因为该生每天都至少做一道题，所以就有:

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_{45}. \qquad (10.3)$$

我们再做一个单调递增的序列,

$$n_1 + 17 < n_2 + 17 < \cdots < n_{45} + 17. \qquad (10.4)$$

并且有 $18 \leqslant n_i + 17 \leqslant 72 + 17 = 89$. 于是 $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_{45}, n_1 + 17, n_2 + 17, \cdots, n_{45} + 17$ 共计 90 个数，对应的数值范围为从 1 到 89. 由抽屉原则 (I)，必有两个数相同. 又因为(10.3)与(10.4)式，可知必有不大于 45 的两个自然 i, j, 使得 $n_j = n_i + 17$. 由(10.3)式，$i < j$. 所以 $n_j - n_i = 17$. 故该生在从 $i+1$ 到 j 天这 $j-i$ 天内他恰好做 17 道数学题.

习　　题

1. 试证明: 任意找 6 个人，他们中间或者有三个人相互之间都认识，或者有三个人相互之间是完全陌生的.

§2 算术差$-_{\omega}$与算术商$\div_{\omega}$

在第五章§5中，我们定义了算术加法、乘法和方幂三个函数，并且讲了自然数集合ω中减法运算和除法运算是不封闭的. 因此，我们现在来定义算术差与算术商，使得在特定的情况下它们能够分别地起到减法运算和除法运算的作用.

定义 10.1 对于任意的自然数 m, n, 我们令函数 f 满足:

(1) $f(m, n) = 0$ （当 $m \leqslant n$ 时），

(2) $f(m, n) = K$ （当 $n < m$ 并且 $K + n = m$ 时）.

对于这一函数 f, 我们记做 $-_{\omega}$, 即

$$m -_{\omega} n = f(m, n)$$

换言之，我们有:

$$m -_{\omega} n = \begin{cases} 0 & \text{当 } m \leqslant n \text{ 时}, \\ K & \text{当 } K \in \omega \text{ 且 } K + n = m \text{ 时}. \end{cases}$$

定理 10.1 上述定义的函数 $-_{\omega}$ 的定义域为 $\omega \times \omega$, 值域为 ω. 即:

$$-_{\omega}: \omega \times \omega \to \omega$$

证明 对于任意给定的两个自然数 m, n, 由推论 5.2 可以知道，总有 $m \leqslant n$ 成立或者 $n < m$ 成立. 当 $m \leqslant n$ 成立时，由定义 10.1(1)，我们就有 $m -_{\omega} n = 0$. 当 $n < m$ 成立时，由定理 5.10，总有一自然数 $K \in \omega$, 使得 $K + n = m$ 成立. 这样由定义 10.1(2)，就有 $m -_{\omega} n = K$.

综上所述，我们有：对于任意的自然数m和n，即

$$\langle m, n\rangle \in \omega \times \omega,$$

都有 $m -_{\omega} n \in \omega$，这就获得了欲证的结果。

注 1 在定义 10.1 中，我们已经给出了算术差 $-_{\omega}$ 的定义，我们也可采用其它方式去定义算术差 $-_{\omega}$。比如，我们先令由m算术减 1 的函数 g 为：

(1) $g(0) = 0$,

(2) $g(m^{+}) = m$.

由此，我们再令

(3) $m -_{\omega} 0 = m$,

(4) $m -_{\omega} n^{+} = (m -_{\omega} n) -_{\omega} 1 = g(m -_{\omega} n)$.

上述(1)与(2)可以直接写做

(1′) $0 -_{\omega} 1 = 0$,

(2′) $m^{+} -_{\omega} 1 = m$.

算术差 $m -_{\omega} n$ 可以这样理解，就是在数m中去掉m的n个较大的元素（从最大元开始逐步删去），当在删掉的过程中已逐步把m的元素全部删去了就不能再删了。即结果永远是 0（当 $m \leqslant n$ 时）。

比如，$10 -_{\omega} 2$，即从 $\{0, 1, 2, \cdots, 7, 8, 9\}$ 中删掉 2 个较大的元，即 9 与 8，故结果为$\{0, 1, \cdots, 7\}$，即为 8。

又如 $20 -_{\omega} 5$，即在集合 20 中删掉 5 个较大的元，亦即从中删掉 15，16，17，18，19，这时结果为 15。

当 $5 -_{\omega} 4$ 时，从 5 中即从 $\{0, 1, \cdots, 4\}$ 删掉 4 个较大元，这时结果为$\{0\}$，亦即结果为 1。

当 $5-_\omega 5$ 时，从集合5中删掉5个较大元，结果集合已无任何元素了，故结果为0。

当 $5-_\omega 6$ 时，从集合6中删掉6个较大元，显然，结果集合中在删掉5个元时已无任何元素了．已没有元素可删去了，所以结果仍然为0。

上述例子和过程，说明了算术差的实际含义和运算过程。这也表明了它是加法的逆运算。

我们已经有了算术差．由此，我们不难定义任意的二个自然数的通常差的绝对值（虽然在 ω 中我们无法定义任意的二个自然数的通常差），这种绝对值对于我们来说也是很有用的，它也是从 $\omega\times\omega$ 到 ω 的一个函数．并且这一函数也是满射的。

定义 10.2 对于任意的自然数 m 和 n，都可以有

$$|m-n|:=(m-_\omega n)+(n-_\omega m), \tag{10.5}$$

称 $|m-n|$ 为 m, n 差的绝对值。

这一定义是借助于两个已知函数＋（加法）与 $-_\omega$（算术差）而定义的，因而它的定义是合法的，并且它的计算过程也是由加法运算、算术差的运算过程完全确定了的．并且不难看出当 $m=n$ 时，(10.5) 式的右端两项均为0，而 $m\neq n$ 时，右端两项必有一项为0而另一项大于0（即算术差的被减数大于减数的那一项）．所以，对于任意给定的二个不同的自然数来讲，求其差的绝对值也就是求那个大于0的算术差就是欲求结果了。

现在，我们来讨论算术商的概念。

定义 10.3 对于任意给定的自然数m和n，且$0<n$。这时我们用符号$\left[\frac{m}{n}\right]$表示一自然数K，使得

$$n\cdot K\leqslant m<n\cdot K^{+} \qquad (10.6)$$

成立.

定理 10.2 定义 10.3 给出的函数$\left[\frac{m}{n}\right]$的定义域为

$$\omega\times(\omega\dot{-}\{0\}),$$

值域为ω，换言之，我们有一函数f，使得：

(1) $f:\omega\times(\omega\dot{-}\{0\})\rightarrow\omega$，

(2) $f(m,n)=\left[\frac{m}{n}\right]$，(对于所有的自然数$m$，$n$且$0<n$)。

我们不打算严格写出这一定理的证明，而仅仅说明这一定理成立的主要依据和思路，并且给出若干例子．希望读者完成这一证明.

由定理 5.10 对于任意的自然数m和n，$0<n$，满足(10.6)式的自然数K总是存在的．因此，算术商是从$\omega\times(\omega\dot{-}\{0\})$到$\omega$的一函数．并且这种计算过程基本是乘法的一个逆过程．对集合m的元素从 0 开始由小到大，每遇到n个时就一次把这n个元素删掉，一直到不足n个元素时止，所删去的次数就是我们所求的数K．显然，当$m<n$时，$K=0$.

例如，对于$\left[\frac{17}{4}\right]$，我们知道自然数 17 就是集合：

$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$，第一次删去四个元素 0，1，2，3；第二次删去四个元素 4，5，6，7；第三次删去的元素为 8，9，10，11；第四次也就是最后

一次删去的元素为 12，13，14，15. 所以，$\left[\frac{17}{4}\right]=4$.

与乘法运算是扩张的运算相反，算术商是一种压缩或收缩运算．由于任给两个自然数m和n，$0<n$．m不一定恰好是n的整数倍数．也就是不一定存在一个K，使得$m=n\cdot K$，而是总有自然数K和i，$0\leqslant i<n$，使得$m=nK+i$，这样，作为乘法的逆运算——算术商就比乘法有一些复杂性．

现在，我们来讨论二个自然数相除的剩余数这一函数 $\mathrm{res}(m,n)$ 的概念．也就是说，对于任意的二个自然数m和n，$0<n$，$\mathrm{res}(m,n)$ 就是具有以下性质的自然数i，使得

$$m=\left[\frac{m}{n}\right]\cdot n+i. \tag{10.7}$$

我们已经知道总有 $\left[\frac{m}{n}\right]\cdot n\leqslant m$，因此由 (10.7) 式，我们总有

$$i=m-_{\omega}\left[\frac{m}{n}\right]\cdot n. \tag{10.8}$$

因i是由m与n唯一决定的，也就是说，它是m与n的一个函数，所以我们令 $\mathrm{res}(m,n)=i$，这样，由(10.8)式，就有

$$\mathrm{res}(m,n)=m-_{\omega}\left[\frac{m}{n}\right]\cdot n. \tag{10.9}$$

这样，我们有 $\mathrm{res}:\omega\times(\omega\dot{-}\{0\})\to\omega$．当我们规定 $n=0$ 时．res 总为 0，即 $\mathrm{res}(m,0)=0$，这样就有

$$\mathrm{res}:\omega\times\omega\to\omega.$$

现在，我们已完成了剩余数函数的定义．

§3 配对函数

我们已给出了一些很有用的自然数函数，特别是加法、乘法、乘方、算术差、算术商等函数，这些函数在初等数学中都是常见的和重要的，本节给出一类有趣而重要的函数，称之为配对函数.

定义 10.4 从 $\omega\times\omega$ 到 ω 的一内射函数就叫做一配对函数. 也就是说，一个函数

$$J:\omega\times\omega\to\omega$$

是内射的就叫做一配对函数.

定理 10.3 存在着由 $\omega\times\omega$ 到 ω 的一个配对函数.

证明 证明这一定理的最好途径就是具体地找到一个满足定义 10.4 的函数. 我们来构造这样一个函数. 首先，我们按下述方式枚举 $\omega\times\omega$ 的所有元素:

$$\begin{array}{lllll}
\langle 0,0\rangle, & \langle 0,1\rangle, & \langle 0,2\rangle, & \langle 0,3\rangle\cdots\cdots \\
\langle 1,0\rangle, & \langle 1,1\rangle, & \langle 1,2\rangle, & \langle 1,3\rangle\cdots\cdots \\
\langle 2,0\rangle, & \langle 2,1\rangle, & \langle 2,2\rangle, & \langle 2,3\rangle\cdots\cdots \\
\langle 3,0\rangle, & \langle 3,1\rangle, & \langle 3,2\rangle, & \langle 3,3\rangle\cdots\cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array} \tag{10.10}$$

对于 (10.10)，我们可以逐一地配以自然数. 例如我们可以按其中箭头方向所示依次枚举它们（也就是逐一地配以自

然数). $\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 3,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 4,0\rangle,\langle 3,1\rangle,\cdots\cdots$ 分别配以自然数 $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,\cdots$. 这种枚举和对应是有规律的,(10.6) 的规律是很显然的, 不难看出它枚举了 $\omega\times\omega$ 的所有元素. 而箭头的方向是这样的,在(10.10)中,由左上端开始,其每一斜线上的每一有序对的两数之和相等. 它们依次为 $0,1,2,3,4,5,\cdots\cdots$,每一斜线上有序对的第二个元素依次为 $0,1,2,\cdots$ 一直到该斜线的顶部(即第二元素恰为斜线所对应的自然数). 换句话说,任给

$$\langle m_1, n_1\rangle\in\omega\times\omega,\quad \langle m_2, n_2\rangle\in\omega\times\omega,$$

若 $m_1+n_1<m_2+n_2$, 则先枚举 $\langle m_1, n_1\rangle$ 后枚举 $\langle m_2, n_2\rangle$, 即 $\langle m_1, n_1\rangle$ 对应的自然数小于 $\langle m_2, n_2\rangle$ 对应的自然数. 若 $m_1+n_1=m_2+n_2$ 时, 考察 n_1 与 n_2, 当 $n_1<n_2$ 时, 先枚举 $\langle m_1, n_1\rangle$, 后枚举 $\langle m_2, n_2\rangle$, 反之亦然.

按照上述对应方法, 对于任意 $\langle m, n\rangle\in\omega\times\omega$ 都有一 $K\in\omega$, 使得 $\langle m, n\rangle$ 对应于 K, 即 $J(m, n)=K\in\omega$, 并且对于不同的 $\langle m_1, n_1\rangle$, $\langle m_2, n_2\rangle$, 它们就对应于不同的自然数. 即 $J(m_1, n_1)\neq J(m_2, n_2)$. 也就是说,满足上述的枚举函数 J 就是 $\omega\times\omega$ 的一配对函数. 而且,不难看出, 它的表达式为:

$$J(m, n)=\frac{1}{2}((m+n)^2+m+3n)$$

$$=\frac{1}{2}((m+n)(m+n+1)+2n).$$

对于任意的 $m\in\omega$, $n\in\omega$, 不难看出函数 $J(m, n)$ 都取自然

数值．证毕．

*§4 递归定理

定义 5.7、5.8 与 5.9 给出的算术运算加法、乘法和方幂时，定义方法有点特别，在定义函数在自然数 $n+1$ 的函数值时，需用到在自变量取 n 时 f 的值，但是当时我们没有讨论这种定义格式的合法性．现在来讨论这个问题．

首先考察两个例题：

例 1 函数 $g:\omega\to\omega$ 定义如下：

$$g(0)=1,$$

$$g(n^+)=n^2 \qquad \text{对于每一 } n\in\omega \text{ 时}.$$

例 2 函数 $f:\omega\to\omega$ 定义如下：

$$f(0)=1,$$

$$f(n^+)=f(n)\cdot n^+ \qquad \text{对于每一 } n\in\omega.$$

这两个简单例子，定义的格式上是不同的．函数 g 的定义给出了计算 $f(n)$（对于任意的 $n\in\omega$）的显式指令和方法．确切地说，它能够使我们去塑述一条件 $P(x,y)$ 使得

$$g(x)=y \text{ 当且仅当 } P(x,y),$$

例如，令：$(x=0\to y=1\wedge\exists n\in\omega(x=n^+\to y=n^2))$为公式 $P(x,y)$，满足函数 g 的存在唯一性可由分离公理和外延公理并利用下式得到

$$g=\{\langle x,y\rangle|\langle x,y\rangle\in\omega\times\omega\wedge P(x,y)\}.$$

相反地，例 2 中 f 的定义并未告诉我们对于 $x\in\omega$ 时，如

何去计算 $f(x)$ 的显式定义，而它需依赖于对于某些自变量小于 x 时，函数 f 已经获得的值，它不是直接明显地去陈述一个条件 P，而且 P 不包含函数 f 的已给出的值，使得

$$f(x)=y \quad 当且仅当 \quad P(x,y).$$

但是我们已能够说例 2 中的函数 f 应该满足已给定的条件："f 是从 ω 到 ω 的一函数，并且它满足初始条件：$f(0)=1$ 和递归条件：$\forall n\in\omega, f(n^+)=f(n)\cdot(n^+)$"。

这种定义方式在数学和计算机科学中被广泛地使用. 就例 2 而言，它定义阶乘 ($n!$) 这一函数，它的计算步骤可以是：对 $n^+\in\omega$。

$$\begin{array}{l}
1\\
1\cdot 1\\
(1\cdot 1)\cdot 2\\
((1\cdot 1)\cdot 2)\cdot 3\\
(((1\cdot 1)\cdot 2)\cdot 3)\cdot 4\\
\qquad\vdots\\
(\cdots((((1\cdot 1)\cdot 2)\cdot 3)\cdot 4)\cdots n)\cdot n^+.
\end{array}$$

按照上述步骤，对于任意的自然数 n，我们都可以一步一步地求 f 的值. 下面的定理，保证了这种用递归方法定义函数是合理的.

今后，我们用符号 $\mathrm{Fun}(x)$ 表示 x 是一函数.

定理 10.4 对于任意给定的元 $a\in\omega$ 和函数

$$g:\omega\to\omega,$$

都有唯一的函数 $f:\omega\to\omega$ 使得:

(1) $f(0)=a$,

(2) $f(n^+)=g(f(n))$.

证明 先证存在性．我们定义对于一自然数 n^+ 为定义域的函数 $t:n^+\to\omega$，使得它满足如下的条件：

$\mathrm{Fun}(t)\wedge\mathrm{dom}(t)=n^+\wedge\langle 0,a\rangle\in t\wedge\forall y\in n\exists!z\exists!u$

$(\langle y,z\rangle\in t\wedge\langle z,u\rangle\in g\to\langle y^+,u\rangle\in t)$.

我们把这一公式记做 $A(t,n)$ 令

$$K:=\{t\mid\exists nA(t,n)\},\tag{10.11}$$

$$f:=\bigcup k.\tag{10.12}$$

我们断定 f 是一函数． 由定理 9.12，仅须证明K是相容的．令 t_1，$t_2\in K$，$\mathrm{dom}(t_1)=n_1\in\omega$，$\mathrm{dom}(t_2)=n_2\in\omega$．不失一般性，假定 $n_1\leqslant n_2$，即 $n_1\subset n_2$．仅须指出，对于所有的 $k\in n_1$，我们有 $t_1(k)=t_2(k)$．我们由数学归纳法论证这一事实，因为 $t_1(0)=a=t_2(0)$，令 $k^+\in n_1$ 并且使得 $t_1(k)=t_2(k)$，那么 $t_1(k^+)=g(t_1(k))=g(t_2(k))=t_2(k^+)$，所以对于所有的 $k\in n_1$，都有 $t_1(k)=t_2(k)$.

再证：$\mathrm{dom}(f)=\omega$，$\mathrm{ran}(f)\subset\omega$．显然有 $\mathrm{dom}(f)\subset\omega$，证明 $\mathrm{dom}(f)=\omega$，只须证明对于每一 $n\in\omega$，都存在一函数 t 使得 $t\in K$．假定对 n 我们已存在一函数 t，使得 $t\in K$，

$$\mathrm{dom}(t)=n,$$

我们来定义 t_1，使得

$$t_1(m)=\begin{cases}t(m) & \text{当 } m\in n \text{ 时},\\ g(t(n-1)) & \text{当 } m=n \text{ 时}.\end{cases}$$

这样 $t_1\in K$，且 $\mathrm{dom}(t_1)=n^+$，所以 $\mathrm{dom}(f)=\omega$.

显然，$\mathrm{ran}(f)\subset\mathrm{ran}(g)\subset\omega$.

再证：f 满足条件(1)与(2). 因为对于每一

$$t\in K,\quad t(0)=a,$$

故 $f(0)=a$，并且对于任意的 $n\in\omega$，$t\in K$ 且 $n^+\in\mathrm{dom}(t)$，就有

$$f(n^+)=t(n^+)=g(t(n))=g(f(n)).$$

这就证明了定理所要求的函数的存在性.

再证明唯一性. 假定还有另一函数 $h:\omega\to\omega$，并且对于任一 $n\in\omega$，都有

(a) $h(0)=a$，

(b) $h(n^+)=g(h(n))$.

现在指出，对每一 $n\in\omega$，由数学归纳法，都有

$$f(n)=h(n),$$

因为：

$$f(0)=a=h(0),$$

若

$$f(n)=h(n)$$

则

$$f(n^+)=g(f(n))=g(h(n))=h(n^+).$$

所以 $f=h$，即得欲证结果.

定理 10.5 已知函数

$$h:\underbrace{\omega\times\omega\times\cdots\cdots\times\omega}_{n\text{ 次}}\to\omega$$

函数

$$g: \underbrace{\omega \times \omega \times \cdots\cdots \times \omega}_{n+1\text{ 次}} \to \omega.$$

那么存在一 $n+1$ 元函数

$$f: \underbrace{\omega \times \omega \times \cdots\cdots \times \omega}_{n+1\text{ 次}} \to \omega,$$

使得

(1) $f(0, x_1, \cdots\cdots, x_n) = h(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$,

(2) $f(x^+, x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) = g(f(x, x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n), x_1, \cdots\cdots, x_n)$.

定理的证明仅是把定理10.4的证明推广到函数含有参变量的情形，这里从略.

例 3 前驱函数 $f: \omega \to \omega$，对于任意自然数 n，当 $n=0$ 时，$f(0)=0$，当 $n>0$ 时，$f(n)=n-1$，即

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(n^+) = n. \end{cases}$$

例 4 符号函数，$s_g: \omega \to \omega$

$$\begin{cases} s_g(0) = 0, \\ s_g(n^+) = 1. \end{cases}$$

例 5 反符号函数 $\overline{s_g}: \omega \to \omega$

$$\begin{cases} \overline{s_g}(0) = 1 \\ \overline{s_g}(n+1) = 0. \end{cases}$$

习　　题

1. 对于自然数 m，n，求出 m 可被 n 整除的特征函数.
2. 定义一函数 $f: \omega \to \omega$，使得 f 满足下述条件

(1) $f(0)=0$,

(2) 对于某一自然数 K,使得

$$K^2 \leqslant n < (K+1)^2$$

时,就令 $f(n)=K$。

上述函数$f(n)$，人们常常记做 $[\sqrt{n}]$ 也称为平方根整函数。

使用递归定理和一些已知函数定义出这一函数$[\sqrt{n}]$。

3.给出平方数集合的特征函数。

4.证明定理 10.5。

5.给出函数 $K:\omega\to\omega$，和函数：$L:\omega\to\omega$，使得,对于任意 x，y，$z\in\omega$，

都有：

$$J(K(z),L(z))=z,$$
$$K(J(x,y))=x,$$
$$L(J(x,y))=y.$$

第十一章 超幂与超积

本章引入函数集合的两个重要的概念：超幂与超积．目的在于更系统地讨论函数，并且着重讨论定义域和值域均为有穷集合时函数的特征．超幂是超积的特殊情形，我们特别提出超幂是为了更细致地讨论这一特殊情形．我们继续使用第六章讨论有穷集合的幂集合时引进的树型表示法，因为这种表示形象直观，易于领悟．然后再由超幂推广到超积．

§1 超 幂

定义 11.1 对于任意的两个集合 S 与 u，我们称 $u\uparrow S$（有时也记做 ${}^{S}u$ 或 u^{S}）为由集合 S 到集合 u 的超幂，其中

$$u\uparrow S:=\{f\mid \mathrm{Fun}(f)\wedge \mathrm{dom}(f)=S\wedge \mathrm{ran}(f)\subset u\}$$
$$=\{f\mid f:S\to u\}.$$

也就是说，$u\uparrow S$ 是由所有从 S 到 u 的函数所组成．其中 S 与 u 为任意给定的集合，它们可以是有穷集合或无穷集合．

注 1 如果 $S=\varnothing$，$u\neq\varnothing$ 成立．则因为 $\varnothing:\varnothing\to u$，空函数 $\varnothing$ 是仅有的一个以空集合为定义域的函数．所以有

$$u\uparrow\varnothing=\{\varnothing\}.$$

作为一特例，我们规定

$$\varnothing \uparrow \varnothing = \{\varnothing\}.$$

然而，当 $S \neq \varnothing$，而 $u = \varnothing$ 时，由于不可能有非空定义域和空值域的函数．这是因为假定有一函数 f，则对于任一 $x \in S$，都有一 y，使得 $\langle x, y\rangle \in f$，即 $y \in \mathrm{ran}(f)$．现在 $S \neq \varnothing$，所以，总有 $x \in S$，因而 $\mathrm{ran}(f) \neq \varnothing$．这与 $u = \varnothing$ 矛盾．所以，当 $S \neq \varnothing$ 时，有

$$\varnothing \uparrow S = \varnothing.$$

例 1 令 $S = \{a, b\}$，$u = \{c\}$．这时，有

$$u \uparrow S = \{\{\langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle\}\}.$$

也就是说，这时仅有一个函数 f，并且

$$f = \{\langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle\}.$$

亦可用图 1 表示这一函数

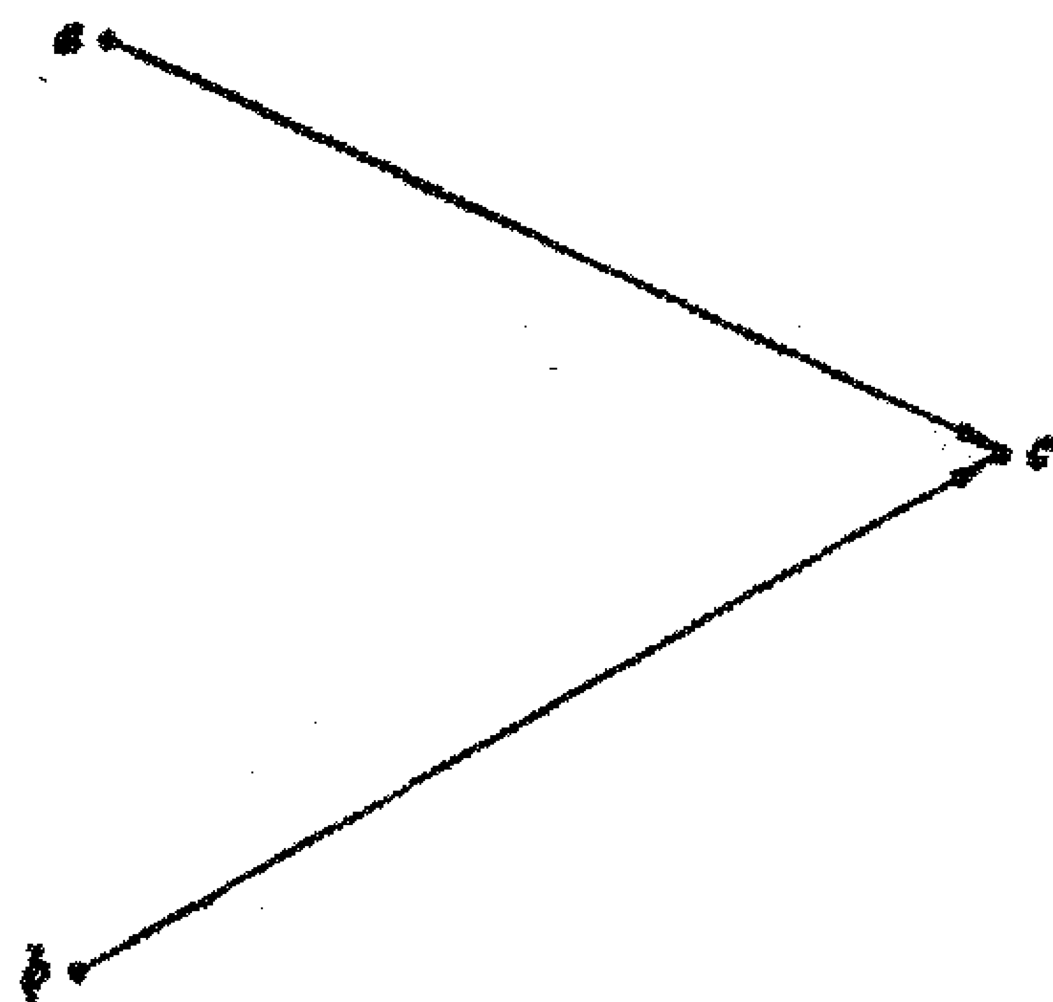


图 1　例 1 中函数 f 的示意图

例 2 令 $S = \{a\}$，$u = \{b, c\}$，这时我们有

$$u \uparrow S = \{\{\langle a, b\rangle\}, \{\langle a, c\rangle\}\}.$$

也就是说，这时有二个函数 f_1 与 f_2，其中

$$f_1 = \{\langle a, b\rangle\},$$

$$f_2 = \{\langle a, c\rangle\}.$$

这两个函数可分别由图 2(*A*)、(*B*) 给出图形表示.

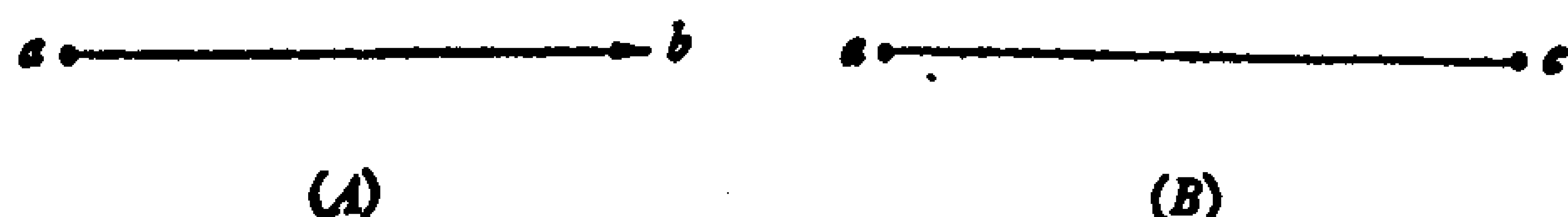


图 2　例 2 中函数 f_1 与 f_2 的图形表示

例 3　令 $S = \{a\}$，$u = \{b\}$，这时我们有

$$u \uparrow S = \{\{\langle a, b\rangle\}\}.$$

也就是说，这时仅有一个函数 f，并且

$$f = \{\langle a, b\rangle\}.$$

这一函数的图形表示是明显的，它与图 2(*A*) 相同.

例 4　令 $S = \{a, b\}$，$u = \{c, d\}$，这时我们有

$$u \uparrow S = \{\{\langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle\}, \{\langle a, d\rangle, \langle b, d\rangle\}, \{\langle a, c\rangle, \langle b, d\rangle\}, \{\langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle\}\}.$$

这时有四个函数，我们先用图 3 表示它们.

我们还可以换一种方法来表述这四个函数，我们来做一个表格，先把 S 的元素列在表头上的左边，表头右边写上超幂"$u \uparrow S$"，从左边第一行开始，逐一写出从 u 中任取的两个元素的排列. 每一种排列为一行，并且每一行都表示 $u \uparrow S$ 中一元(即一个函数)，把此函数写在该行的左边 ($u \uparrow S$ 的下边，表示它是 $u \uparrow S$ 的一个元素). 如表 1 所示，每一个函数的元素都是这样的有序对，我们以第三行所表示的函数为例，第一元

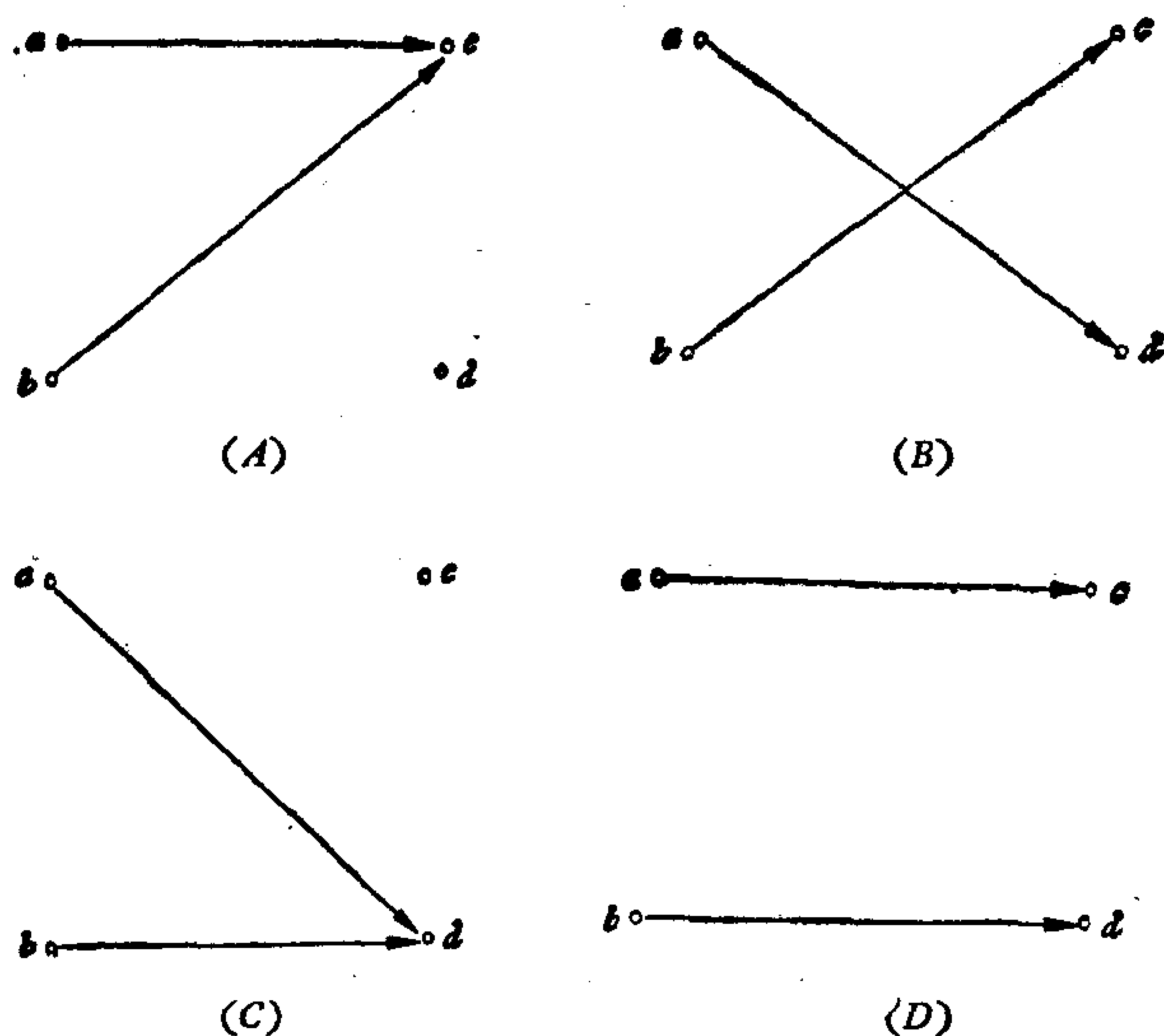


图 3　例 4 中 $u\uparrow S$ 的四个函数的表示

表 1　$u\uparrow S$ 的列表表示

a	b	$u\uparrow S$
c	c	$\{\langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle\}$
d	c	$\{\langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle\}$
c	d	$\{\langle a, c\rangle, \langle b, d\rangle\}$
d	d	$\{\langle a, d\rangle, \langle b, d\rangle\}$

为第一行中一个元（例如 a），第二元为所取的第一行中该元对应于第三行中的相应元（这时应为 c），由此，获行 $\langle a, c\rangle$；当在表头中取 b 时，第三行的相应元为 d，这时又获得有序对 $\langle b, d\rangle$，因此，第三行所对应的函数就是 $\{\langle a, c\rangle, \langle b, d\rangle\}$。也就是说，超幂的列表表示法的左边表头为超幂中函数的定

义域，其余各行为表头中相应元的对应值，每一行恰好对应一函数，并把此函数写到相应行中竖杠的右边(在 $u\uparrow S$ 的下边)．其它行所对应的函数可类似地得出．

例 5 我们用枚举法和列表法求 $2\uparrow 2$ 如下

$$2\uparrow 2=\{\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle\},\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,1\rangle\}\\ \{\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle\},\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,1\rangle\}\}.$$

$2\uparrow 2$ 与例 4 相同，仍然是四个函数，若用列表法表示这一超幂，如表 2 所示，不难看出，仍与表 1 有类似之处．

表 2　$2\uparrow 2$ 的列表表示

0	1	$2\uparrow 2$
0	0	$\{\langle 1,0\rangle,\langle 0,0\rangle\}$
1	0	$\{\langle 1,0\rangle,\langle 0,1\rangle\}$
0	1	$\{\langle 1,1\rangle,\langle 0,0\rangle\}$
1	1	$\{\langle 1,1\rangle,\langle 0,1\rangle\}$

例 6 使用列表法给出 $2\uparrow 3$，按例 4 所描述的过程，在表头上 (参见表 3) 左边逐一写上超幂中函数的定义域 3 中的元素 0，1，2[1]．表头的右边写上欲求的超幂 $2\uparrow 3$．在表的横线下边的左边，从值域 2 中任取三个 (定义域中元的数目) 进行排列．从上至下把每一排列排为一行，写完这些排列，每一行恰好对应于 $2\uparrow 3$ 中一个元素．把这一元素写成该行的右边

1) 在本书中，当定义域为一自然数集合时，我们总是从左至右由小到大地逐一排下去，在 S 中元不是自然数时，我们也总以自然数编号，并类似地给出排列来．

表 3　2↑3 的列表表示

0	1	2	2↑3
0	0	0	$\{\langle 2, 0\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 0, 0\rangle\}$
1	0	0	$\{\langle 2, 0\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle\}$
0	1	0	$\{\langle 2, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 0, 0\rangle\}$
1	1	0	$\{\langle 2, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 0, 1\rangle\}$
0	0	1	$\{\langle 2, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 0, 0\rangle\}$
1	0	1	$\{\langle 2, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle\}$
0	1	1	$\{\langle 2, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 0, 0\rangle\}$
1	1	1	$\{\langle 2, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 0, 1\rangle\}$

(即 2↑3 的下边)，如此，就获得了 2↑3 的所有元素．从而就获得了 2↑3.

当 u, S 为有穷集合时，我们还可以用丰满的二值树的方法来表示超幂 $u \uparrow S$．例如例 6 中的 2↑3．事实上按我们的规则，表 3 的左边为一个 8×3 的矩阵．已经表达了超幂 2↑3.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{11.1}$$

并称 (11.1) 为 2↑3 的表示矩阵．在第六章中，我们已经指出这种矩阵还可用丰满的二值树形象地给以表达（称这种树为 2↑3 的表示树）．这就是图 4 中所描述的树．而这一树的每一树枝恰好表达一函数（即 2↑3 的一个元素）．所有枝就表

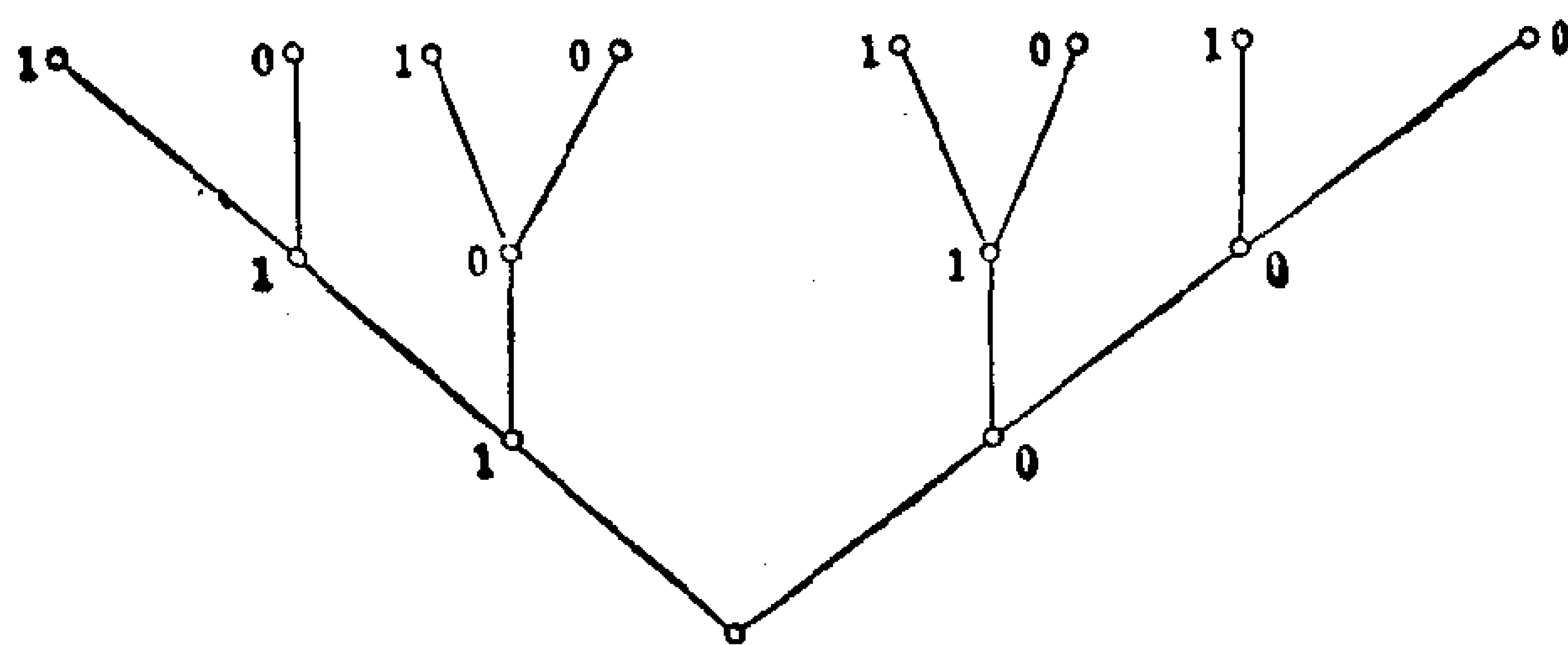


图 4 $2\uparrow 3$ 的表示树

示超幂 $2\uparrow 3$。

例 7 使用列表法、矩阵法和树型法给出超幂 $3\uparrow 2$。

由表 4 看出，表的左下方有九行，恰好是在集合 3 中任取两个元的排列，每一排列占一行，这也就形成了 $3\uparrow 2$ 的表示矩阵。

表 4 $3\uparrow 2$ 的列表表示

0	1	$3\uparrow 2$
0	0	$\{\langle 1, 0\rangle, \langle 0, 0\rangle\}$
1	0	$\{\langle 1, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle\}$
2	0	$\{\langle 1, 0\rangle, \langle 0, 2\rangle\}$
0	1	$\{\langle 1, 1\rangle, \langle 0, 0\rangle\}$
1	1	$\{\langle 1, 1\rangle, \langle 0, 1\rangle\}$
2	1	$\{\langle 1, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle\}$
0	2	$\{\langle 1, 2\rangle, \langle 0, 0\rangle\}$
1	2	$\{\langle 1, 2\rangle, \langle 0, 1\rangle\}$
2	2	$\{\langle 1, 2\rangle, \langle 0, 2\rangle\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{11.2}$$

如上指出,(11.2)唯一地表达了超幂3↑2. (11.2)是3↑2的表示矩阵. 现在我们给出一棵表达上述9行2列即9×2

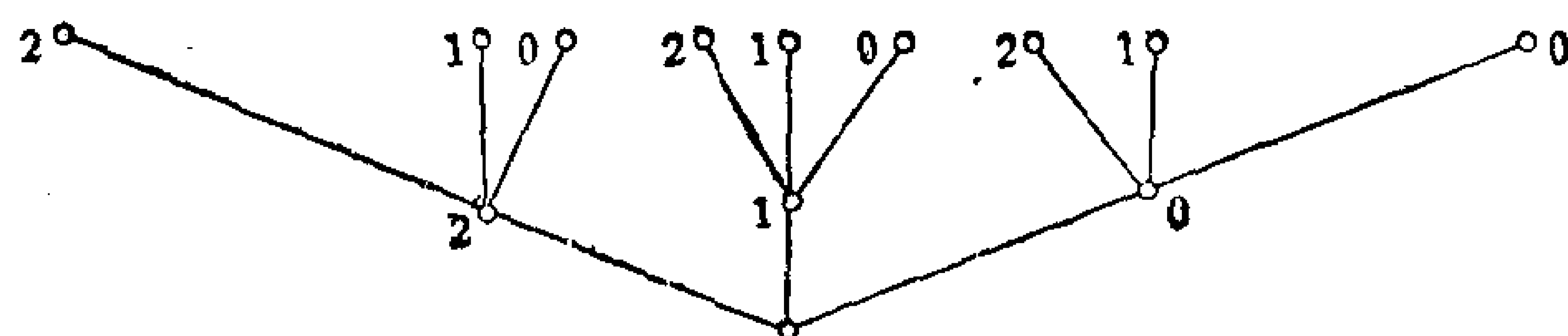


图5 3↑2的表示树

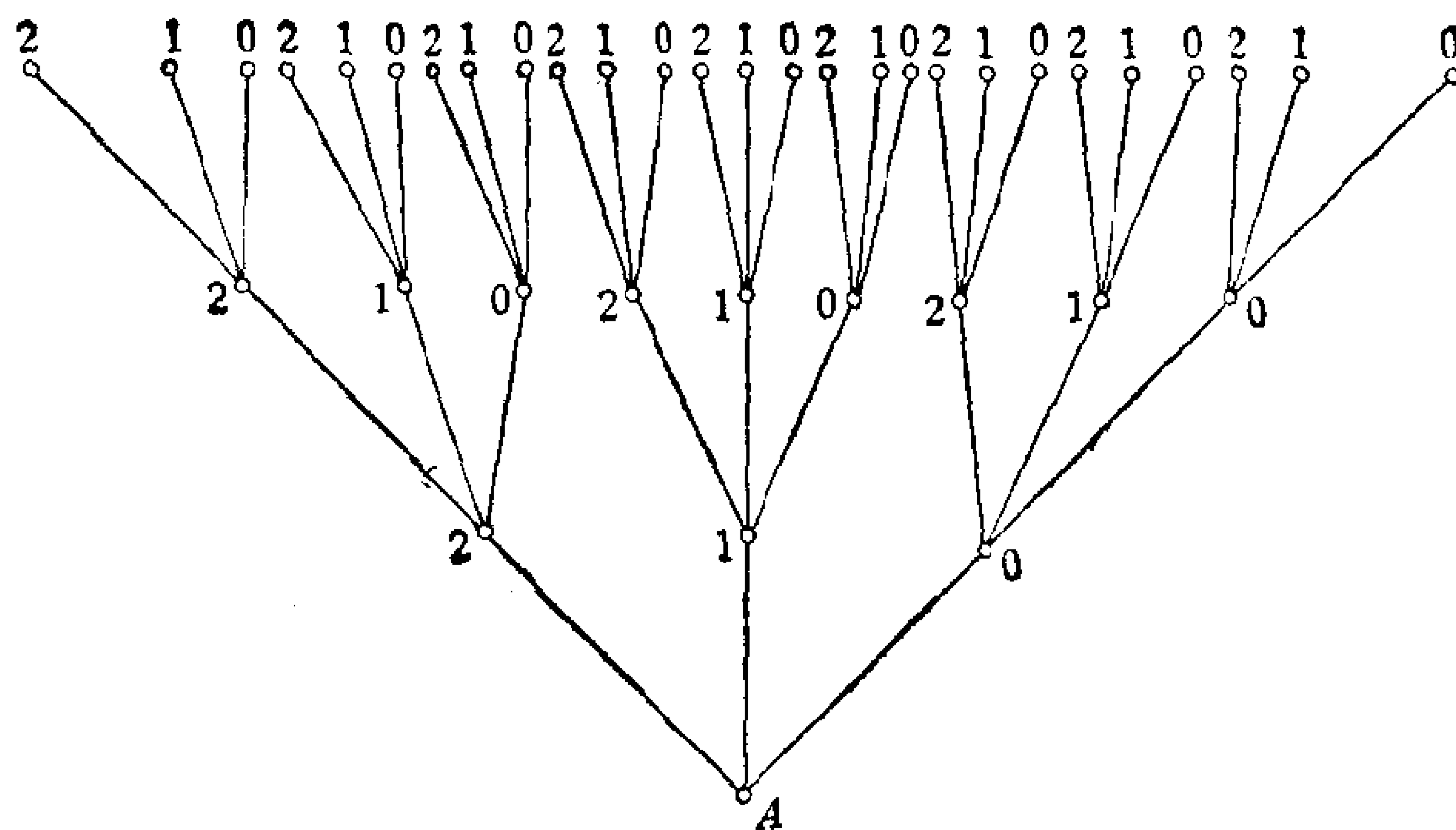


图6 3↑3的表示树

的矩阵的丰满三值（枝）树．这一树是一棵根长出三个树叉，每一节点也长三个树叉，见图 5.

例 8 给出 $3\uparrow 3$ 的表示树和表示矩阵．

首先我们做出 $3\uparrow 3$ 的表示树如图 6.

其次我们直接写出 $3\uparrow 3$ 的表示矩阵如下：

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 0 \\
1 & 2 & 0 \\
2 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
2 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 2 \\
2 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 2 \\
0 & 2 & 2 \\
1 & 2 & 2 \\
2 & 2 & 2
\end{pmatrix}
$$

§2 超幂的性质

上节中，我们就 S 与 u 为特殊集合时，给出了 $u\uparrow S$，它们当然是集合，并且是函数的有穷集合。对于任意的集合 S 与 u，$u\uparrow S$ 都是集合吗？下边回答这一问题。

定理 11.1 若 S 与 u 为任意的集合，则由 S 到 u 的超幂 $u\uparrow S$ 也是一集合。

证明 因为 $f:S\to u$，$f\subset S\times u$，因此，有

$$f\in P(S\times u).$$

这样，由定义 11.1，就有

$$u\uparrow S=\{f\mid \mathrm{Fun}(f)\wedge \mathrm{dom}(f)=S\wedge \mathrm{ran}(f)\subset u \wedge f\in P(S\times u)\}. \tag{11.3}$$

其中的 Fun(f)（即 f 是函数）能够用一公式描述出来。这就需要首先描述"f 是一关系"。这就是：

$$\forall x(x\in f\to \exists y\exists z(x=\langle y,z\rangle)).$$

因此，"f 是一函数"应是

$$\forall x(x\in f\to \exists y\exists z(x=\langle y,z\rangle))\wedge\forall t\forall y\forall z(\langle t,y\rangle\in f \wedge\langle t,z\rangle\in f\to y=z). \tag{11.4}$$

由(11.4)与(11.3)式，并使用分离公理，可知 $u\uparrow S$ 是一集合。这就获得了欲证结果。

在上节，对于 S 与 u 的一些特殊情况，我们曾给出了 $u\uparrow S$ 的所有元素。现在，我们对于任意的有穷集合 S 与 u，给出关于 $u\uparrow S$ 的元素数目的一般定理。

定理 11.2 对于任意的集合 S 与 u，若 $\bar{\bar{S}}=n$ 且 $\bar{\bar{u}}=m$（其中 n, m 为自然数），则

$$\overline{\overline{u\uparrow S}}=m^n.$$

证明 我们仍用双重数学归纳法分下述几个步骤证明.

(1) $\varnothing\uparrow\varnothing=\{\varnothing\}$，并且 $0^0=1$. 这时，定理成立.

(2) 当 $S\neq\varnothing$ 时，$\varnothing\uparrow S=\varnothing$，并且当 $n\neq 0$ 时，$0^n=0$，所以，这时定理也成立.

(3) 对于任意 u，当 $u\neq\varnothing$，我们有

$$u\uparrow\varnothing=\{\varnothing\}.$$

并且对于任意的自然数 m，当 $m\neq 0$ 时，我们有 $m^0=1$，所以，这时定理也成立.

(4) 对于任意给定的自然数 m，我们现在希望证明对于任一自然数 K，定理成立时就能获得 $K+1$ 时定理也成立. 也就是说，当 $\bar{\bar{u}}=m$，$\bar{\bar{s}}=K$ 时，我们有

$$\overline{\overline{u\uparrow S}}=m^K. \tag{11.5}$$

这里可以假定 $0<m$，因为 $m=0$ 时已由 (2) 给出了. 我们欲证当 $K+1$ 时定理成立，即当 $S'=S\cup\{a\}$，并且 $a\notin S$. 即 $\bar{\bar{S}}'=K+1$ 时，我们有

$$\overline{\overline{u^{S'}}}=m^{K+1}. \tag{11.6}$$

如同我们在上节图 4—6 那样，我们用丰满树的树枝表示超幂的元素，因为 $\bar{\bar{u}}=m$，$\bar{\bar{S}}=K$，所以我们用K层丰满m值（枝）树表示超幂集合 u^S. 也就是说，从树根开始长出m个树叉，并每一节点也都长出m个树叉，共有K层. 在其上一层的节点处依照长上去的树叉的位置从左向右依次标上m个数，

即依次为 $m-1$，……1，0．由(11.5)式和我们的假定，我们已有一树 K 层丰满 m 值树，即 $u\uparrow S$ 的表示树．它恰有 m^K 个树枝．我们现在指出 $u^{S'}$ 的表示树恰有 m^{K+1} 个树枝．这是因为在 $u\uparrow S$ 的表示树上，我们再增加一层，由 K 层到 $K+1$ 层，并且是在 $u\uparrow S$ 的表示树的每一树叶上都长 m 个树叉．亦即把原来的每一树叶上都长出 m 个树叶，而原树叶都变成了树的一节点，这样树枝就比 $u\uparrow S$ 的树枝增加了 m 倍，也就是成了 $m^K\cdot m=m^{K+1}$．新的树又恰好是 $u\uparrow S'$ 的表示树．所以我们就完成了(11.6)的证明．

综上所述，应用数学归纳法我们已经证明了对于任意的自然数 m 和 n，当 $\bar{\bar{u}}=m$，$\bar{\bar{S}}=n$ 时，都有

$$\overline{\overline{u\uparrow S}}=m^n$$

成立．定理 11.2 证毕．

§3 超　积

定义 11.2 设 I 为任一集合（有时称 I 为一标号集合），g 为一函数，$\mathrm{dom}(g)=I$，即，对于任一 $i\in I$，都有集合 $g(i)$，这时，我们称

$$\prod_{i\in I}g(i):=\{f\mid \mathrm{Fun}(f)\wedge \mathrm{dom}(f)=I\wedge\forall i\in I(f(i)\in g(i))\} \qquad (11.7)$$

为函数 g 在 I 上的超积．

超积有时也称超乘积或广义笛卡尔积．因为我们可以把

$\prod_{i\in I} g(i)$ 中的元看做"I 元组"，它的"第 i 坐标"的投影恰好是在 $g(i)$ 之中．而 $g(i)$ 又恰好是函数 g 在 $i\in I$ 的函数值．

定理 11.3 对于任意的集合 I 和定义在 I 上的任一函数 g，$\prod_{i\in I} g(i)$ 是一集合．

证明 因为由定义 11.2，若 $f\in\prod_{i\in I} g(i)$，我们就有 f 是一从 I 到集合 $\bigcup_{i\in I} g(i)$ 的一函数，即有

$$f\in\Big(\bigcup_{i\in I} g(i)\Big)\uparrow I.$$

因此就有

$$\prod_{i\in I} g(i)\subset\Big(\bigcup_{i\in I} g(i)\Big)\uparrow I.$$

所以，由分离公理 $\prod_{i\in I} g(i)$ 是一集合．欲证结果得证．

注 2 超幂是超积的一种特别情况，也就是说，对于任一集合 I 和函数 g，使得 $\mathrm{dom}(g)=I$，并且 $\forall i\in I(g(i)=u)$，这时就有

$$\prod_{i\in I} g(i)=u\uparrow I.$$

超积推广了笛卡尔乘积． 因为给出一指标集合 I，和这一集合上的函数 g，都有一超积集合 $\prod_{i\in I} g(i)$，当 I 是有二个元素的集合时，我们把 I 的元素进行编号，这时通过这一函数的相应值就能够获得它与通常定义的笛卡尔积之间的联系．为了描述这种联系，让我们先列举几个例题．

例 9 令 $I=\{0,1\}$，$g(0)=\{a,b\}$，$g(1)=\{c,d\}$，

表 5 $\prod_{i\in I} g(i)$ 的列表表示

0	1	$\prod_{i\in I} g(i)$
a	c	$\{\langle 0, a\rangle, \langle 1, c\rangle\}$,
b	c	$\{\langle 0, b\rangle, \langle 1, c\rangle\}$,
a	d	$\{\langle 0, a\rangle, \langle 1, d\rangle\}$,
b	d	$\{\langle 0, b\rangle, \langle 1, d\rangle\}$.

这时我们有:

$$\prod_{i\in I} g(i) = \{\{\langle 0, a\rangle, \langle 1, c\rangle\}, \{\langle 0, b\rangle, \langle 1, c\rangle\}$$
$$\{\langle 0, a\rangle, \langle 1, d\rangle\}, \{\langle 0, b\rangle, \langle 1, d\rangle\}\}.$$

我们也可以把集合 $\prod_{i\in I} g(i)$ 用列表法列出，以表 5 表示集合 $\prod_{i\in I} g(i)$. 我们也可以把表 5 的左边列为一矩阵,即

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & c \\ a & d \\ b & d \end{pmatrix} \tag{11.8}$$

由(11.8)式可知,这一矩阵的每一行表示一个函数，它的四行恰好表示了四个函数,即 $\prod_{i\in I} g(i)$ 的四个元素. 而另一方面,当我们把该矩阵的每一行看作一有序组时,这一矩阵又表示了笛卡尔积 $g(0)\times g(1)$. 换言之,我们可以由表 5 直接写出 $g(0)\times g(1)$, 反之也一样.

注 3 超积的表示矩阵，每一行表示超积的一元素(即一函数). 因此行之间可以交换. 这是因为 $\prod_{i\in I} g(i)$ 的元是无

序的．例如矩阵

$$\begin{pmatrix} b & c \\ a & c \\ a & d \\ b & d \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} b & d \\ c & d \\ a & c \\ b & c \end{pmatrix}$$

等等都与(11.8)表示相同的超积，然而，当规定了指标集合 I 的次序时，列之间是不能交换的． 这正是函数对应关系的特点．

例 10 令 $I=\{0, 1, 2\}$, $g(0)=3$, $g(1)=\{c, d, e\}$, $g(2)=\{a, b\}$. 这时，可直接列出超积集合 $\prod_{i\in I} g(i)$ 的表示矩阵如下：

$$\begin{pmatrix} 0 & c & a \\ 0 & c & b \\ 0 & d & a \\ 0 & d & b \\ 0 & e & a \\ 0 & e & b \\ 1 & c & a \\ 1 & c & b \\ 1 & d & a \\ 1 & d & b \\ 1 & e & a \\ 1 & e & b \\ 2 & c & a \\ 2 & c & b \\ 2 & d & a \\ 2 & d & b \\ 2 & e & a \\ 2 & e & b \end{pmatrix} \tag{11.9}$$

由(11.9)可知，所求的超积有 18 个元素，也就是定义域为 3 的 18 个函数． 把它的每一行都看作一有序三元组，这

18个三元组就恰好是笛卡尔积 $g(0)\times g(1)\times g(2)$ 的元素. 这样,矩阵(11.9)也就表达了笛卡尔积

$$g(0)\times g(1)\times g(2).$$

并且当 I 为有穷集合且数目 $\overline{\overline{I}}$ 较大时，超积的表示法是比笛卡尔积更方便一些.

定理 11.4 对于任意的有穷集合 I (不妨假定 $\overline{\overline{I}}=n$ 且 $0<n$) 和函数 g, 并且对于任一 $i\in I$, $g(i)$ 是有穷的(不妨假定 $\overline{\overline{g(i)}}=m_i$, $i\in I$, 为方便计，也可约定 $I=n$). 那么，我们有

$$\overline{\overline{\prod_{i\in n} g(i)}}=m_0\cdot m_1\cdot\cdots\cdot m_{n-1}. \tag{11.10}$$

证明 当 $n=1$ 时，这时(11.10)式的右边为 m_0, 而左边恰为 $g(0)$ 中元素的数目,即也等于 m_0, 故(11.10)成立.

假定 $n=K$ 时，定理 11.4 成立，即假定对于任意的 m_0, m_1, $\cdots$, m_{K-1}, 使得当

$$\overline{\overline{g(0)}}=m_0,\ \overline{\overline{g(1)}}=m_1,\ \cdots,\ \overline{\overline{g(K-1)}}=m_{K-1}$$

时,都有

$$\overline{\overline{\prod_{i\in I} g(i)}}=m_0\cdot m_1\cdot\cdots\cdot m_{K-1}. \tag{11.11}$$

我们来证明 $n=K+1$ 定理成立. 这时我们自然可以把(11.10)设想成一棵K层丰满的树，这棵树，从树根起分出 m_0 个树叉. 并且在第一层每一个树叶上(也就是第一层的节点上,在分叉前叫做树叶)每点都分出 m_1 个树叉，以此类推，直至第 $K-1$ 层节点,每点分出 m_{K-1} 个树叉. 由此(11.10)式

成立．现在 $n=K+1$．在上述树上第 K 层再扩充一层，即在第K层叶上，每一叶都长出 m_K 个叉，现在共有树枝为

$$m_0\cdot m_1\cdot\cdots\cdot m_{K-1}\cdot m_K.$$

另一方面，考察超积集合 $\prod_{i\in I} g(i)$，这时 $\prod_{i\in I} g(i)$ 的函数数目比原来的函数数目增加 m_K 倍，因为原来的每一函数再每次增加一个有序对 $\langle K, a_i\rangle$，就得到一新的函数，这样的对恰好有 m_K 个．而当我们考察超积集合时，我们就获得了（当 $\bar{I}=K+1$ 时）

$$\prod_{i\in I} g(i)=m_0\cdot m_1\cdot\cdots\cdot m_{K-1}\cdot m_K. \tag{11.12}$$

假定(11.11)成立，我们获得了(11.12)式成立，这样，对于任意的自然 n 和对于任意的相应的 $m_0, \cdots, m_{n-1}$，使得(11.10)成立．

由此，定理 11.4 证毕．

注 3 定理 11.4 正是中学数学中乘法原理的一种严格的陈述[1]，并且对这一定理我们也给出了一个严格的证明．

超积中的指标集合 I 可以为无穷集合．

例 11 可取 I 为 ω，g 为恒取值 2 的常函数，即

$$g(n)=2,$$

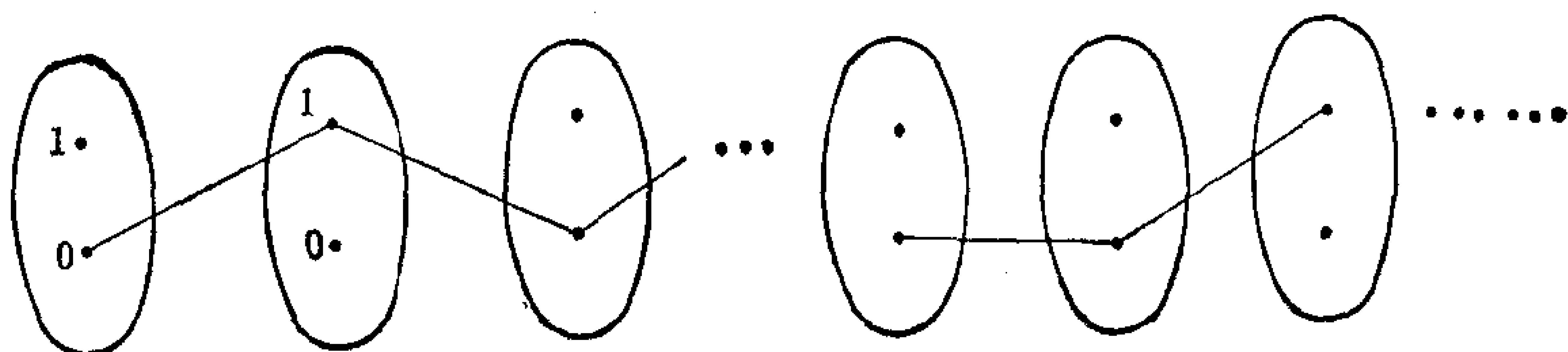
我们来考察 $\prod_{i\in I} g(i)$．如图 7 所示，这些函数值的序列是由

---

1) 乘法原理 做一件事，完成它需要分成几个步骤．做第一步有 m_1 种方法，做第二步有 m_2 种方法，…做第 n 步有 m_n 种方法．那么完成这件事共有

$$N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$$

种不同的方法(参考高中数学三册，第 120 页)．



$g(0)$　$g(1)$　$g(2)$　$g(n-1)$　$g(n)$　$g(n^+)$

图 7

“ω 元组”的 0 与 1 序列所组成. 也就是说对于其中任一序列都是由 $\prod_{i\in I} g(i)$ 中一函数唯一所决定，反之，$\prod_{i\in I} g(i)$ 中任一函数都唯一地决定一“ω 元组”的 0 与 1 的序列. 由于对于任一 $i\in\omega$，$g(i)$ 都是有穷集合(事实上 $g(i)=2$). 所以此序列在有穷位上也只能有有穷多个. 例如，对于任一

$$f\in\prod_{i\in I} g(i),$$

函数 f 只能取矩阵(11.13)的四行之一作为它在 0，1 时之值. 又如函数 f 在 0，1，2，3 时值也只能取矩阵(11.14)的十六行之一. 如我们已经指出的那样，(11.13)与(11.14)均可用丰满的二值树表示，图 8 为表示 (11.13) 的树，这里点 A 不起实质

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.13}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.14}$$

性的作用,图 9 为表示(11.14)的树. 反之,从树的角度着眼,我们可以说,图 8 的 2 层丰满二值树表达了函数簇 $\prod_{i\in I} g(i)$ 的定义域限制在 2 时的结果,图 9 的 5 层丰满二值树表达了这一函数簇的定义域限制在 5 时的结果,这样我们令

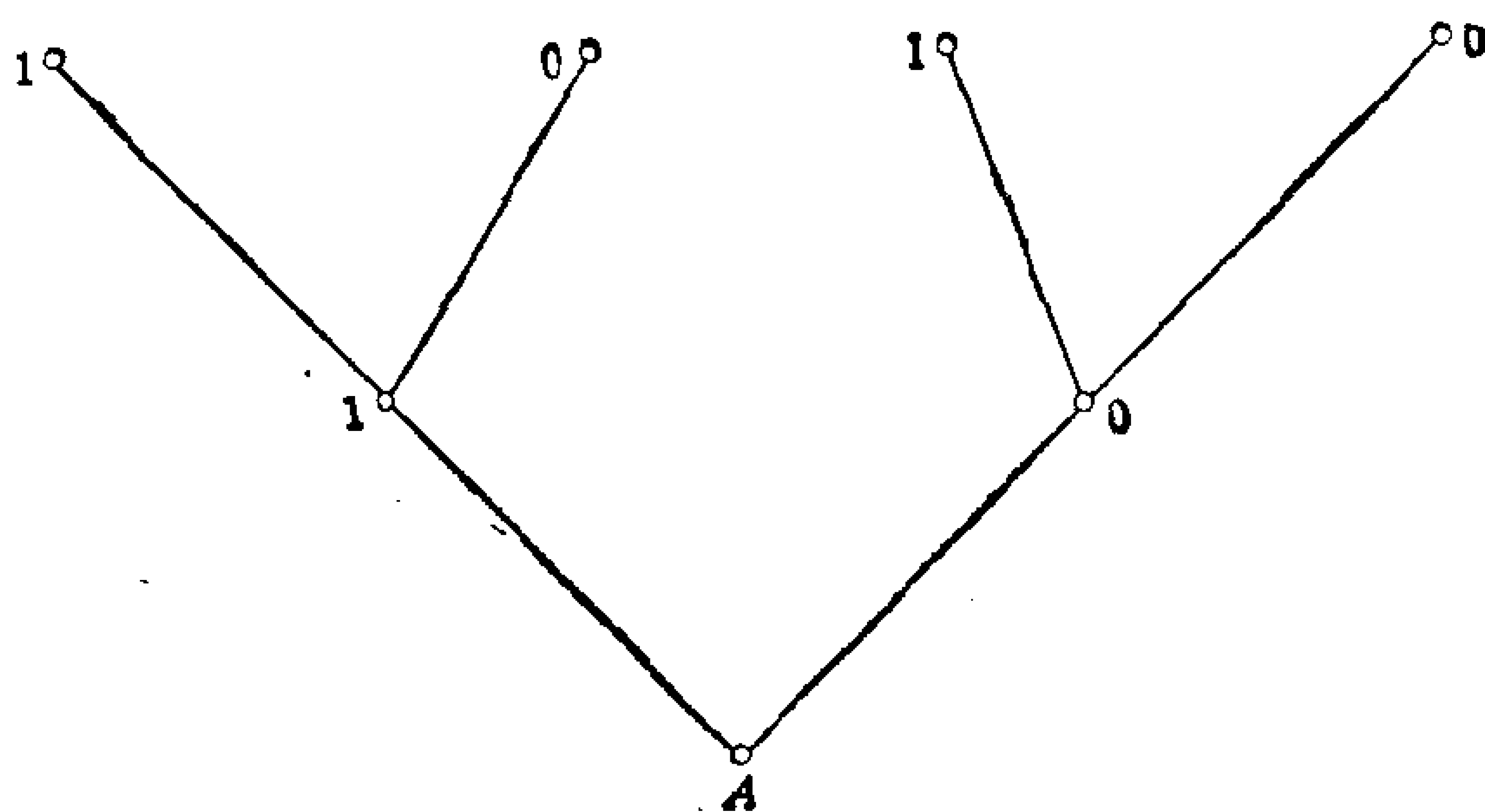


图 8

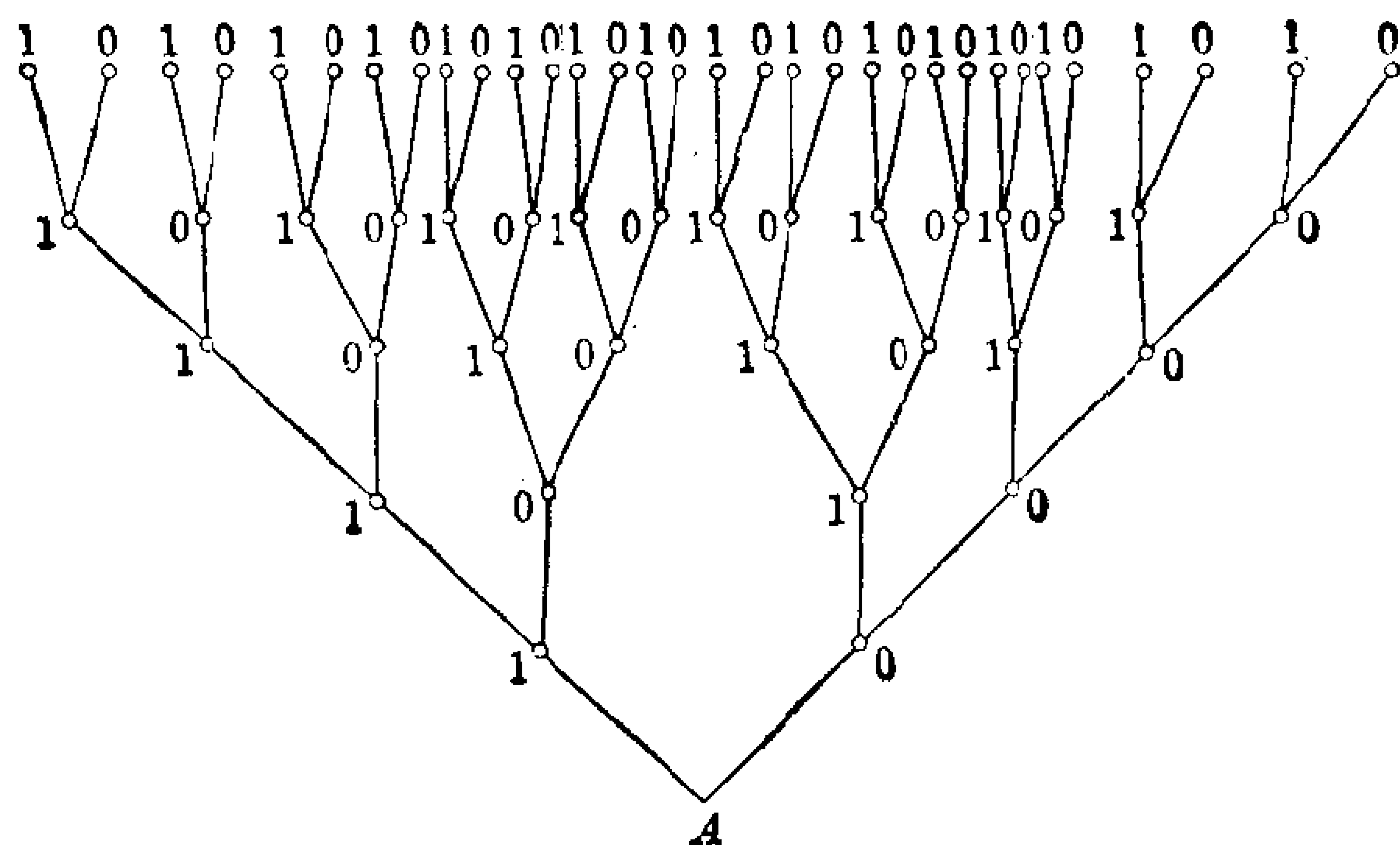


图 9

$$F:=\prod_{i\in I}g(i)$$

时，我们可以说用图 8 表达了函数簇 $F\upharpoonright 2$，并且图 9 表达了函数簇 $F\upharpoonright 5$. 反之，对任意自然数 n，$F\upharpoonright n$ 给出了一棵 n 层的丰满的二值树，当 $n<m$，我们有 $F\upharpoonright m$，这是一棵 m 层的丰满二值树，依此类推. 因此，我们可以设想函数簇 F 给出了一棵 ω 层的丰满二值树. 一个“ω 元组”的 0，1 序列表示这一树的一个树枝. 比如

$$\begin{matrix}0&0&0&0&0&0&\cdots\cdots\\0&1&0&1&0&1&\cdots\cdots\\1&0&1&0&1&0&\cdots\cdots\\1&1&1&1&1&1&\cdots\cdots\end{matrix}$$

等等都分别表达该树的一树枝. 这样，我们就把一树枝，一序列，一函数统一起来了. 这样的无穷多个序列也可看成一矩阵，因此一矩阵，一棵树和一函数簇统一起来了.

例 12　令 ω 上定义的函数 g 为 $g(n) = n^+$. 我们来考察超幂集合 $F := \prod_{i \in \omega} g(i)$. 这也是一函数簇,如图 10 所示，$F$ 中任一函数 f 都是一条可无穷延伸的折线，小圆圈中表示 $g(i)$ 中元素的数目，而且它们都是自然数，都是从 0 开始的一些数,如 $g(0)$ 中仅有 0, $g(1)$ 中仅有 0 与 1,等等. 这样来想像我们所刻划的函数簇.

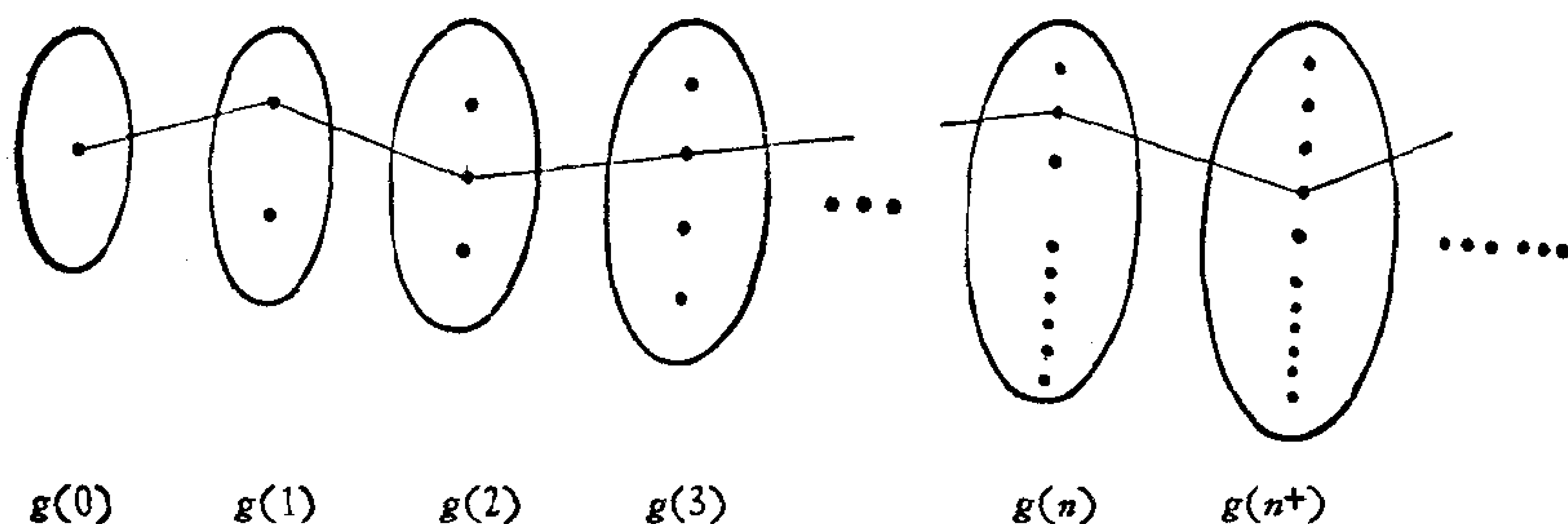


图 10

还可从另一角度,即从树的角度来考察我们的函数簇 F, 这就是对于任一函数 f, 当 $f \in F$ 时,总有 $f(0) = 0$, $f(1)$ 可以取 0 值,也可以取 1 值. 换句话说, $f(1) \in 2$, 一般地,

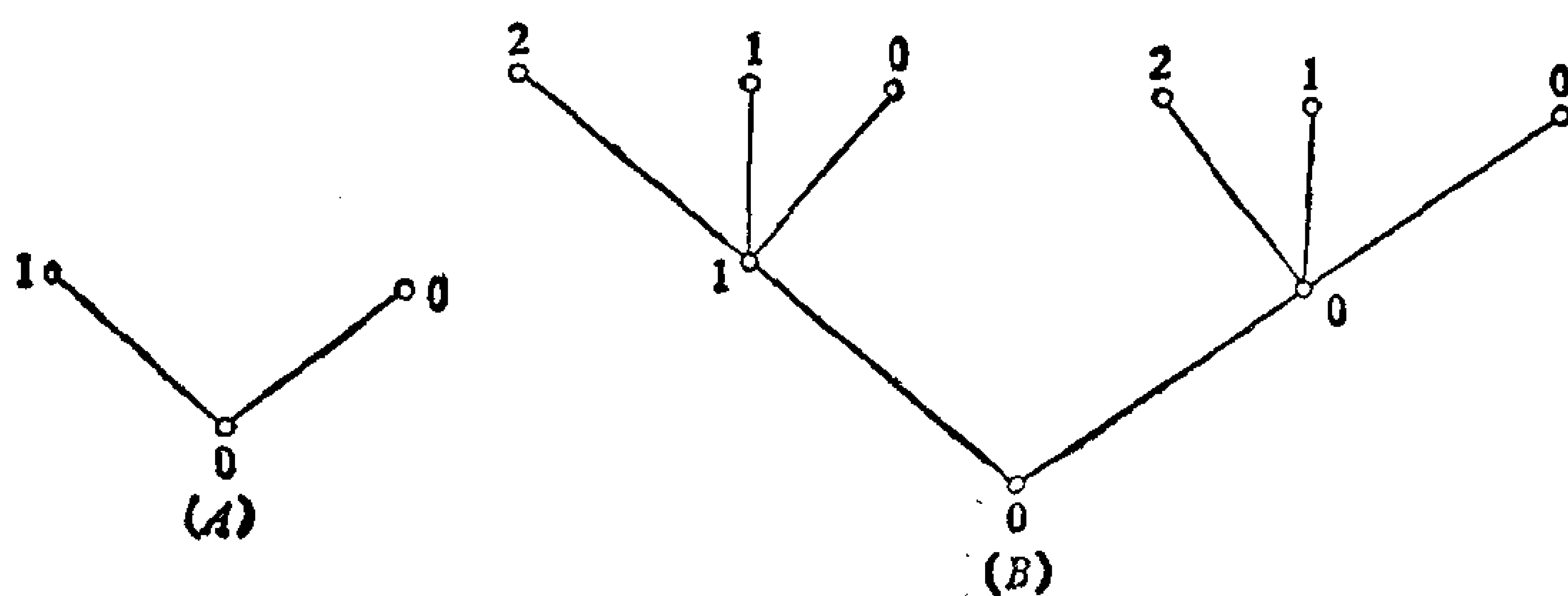


图 11

$$f(n) \in n^+.$$

现在，我们用 $F \restriction n^+$ 表达一个函数簇，即把 F 中的函数的定义域都限制在 n^+ 上的结果. $F \restriction 2$，$F \restriction 3$，分别用图 11 中的 A，B 两棵树所表示，图 10(A) 表示矩阵 (11.15)，反之矩阵 (11.15)也表示图 11(A) 的树. 图 11(B) 表示矩阵 (11.16)，

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.15}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{11.16}$$

反之也一样. 这些树和例 11 中的树不同，第一，那里树根不表示数位，而这里树根表示数零. 这些数的序列中第一位都是 0. 第二，那里都是二值树，而这里不是二值树，它的树叉在逐步增多. 树根长出 2 个树叉；上一层每一节点长出 3 个树叉，再上层长出 4 个树叉，以此类推，比如 $F \restriction 4$ 的树为图 12 所示. 不难看出，F 也是一棵 ω 层的树，它的树叉是逐层逐一

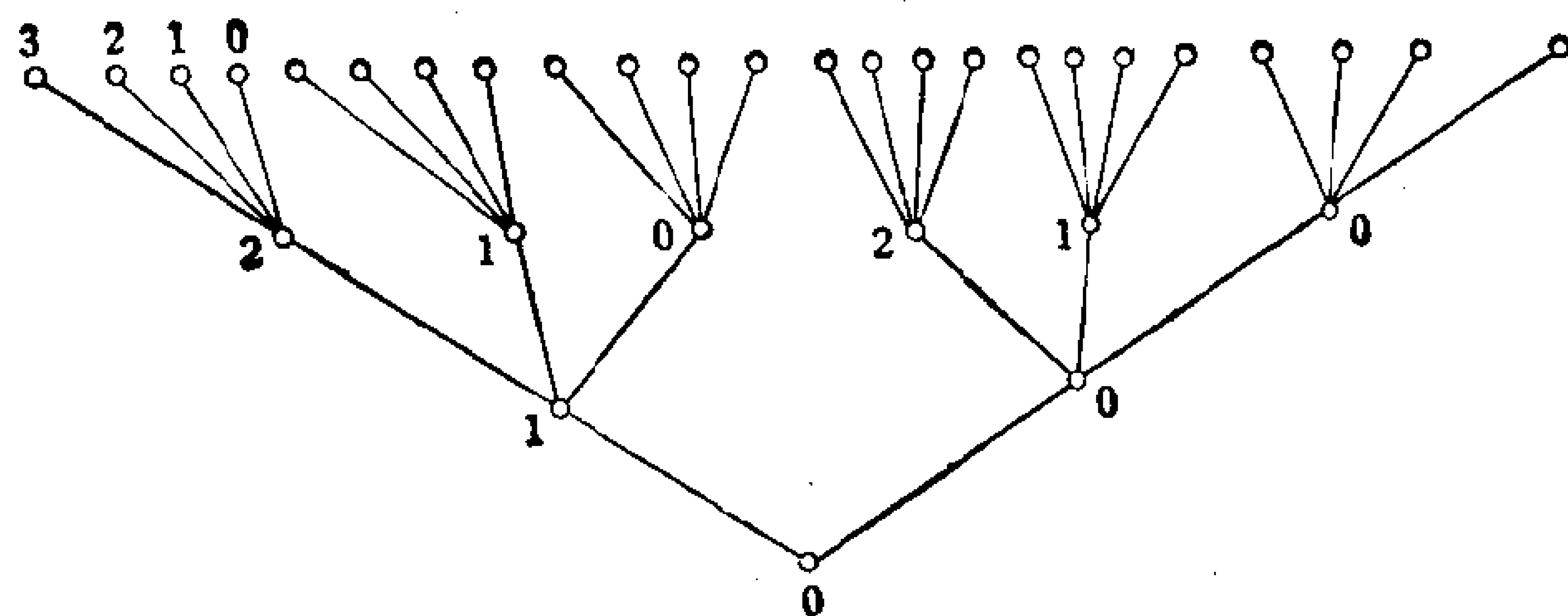


图 12

增多的．这是一棵有趣的树，请读者分析它的特征．

*§4 乘积定理

在上节的一些例子中，对于任意的 $i\in I$, $g(i)\neq\varnothing$，我们都给出或描述了 $\prod_{i\in I}g(i)$ 的元素．由函数的定义，我们不难看出，当存在一 $i\in I$，使得 $g(i)=\varnothing$ 时，就不能有一函数 $f\in\prod_{i\in I}g(i)$，也就是 $\prod_{i\in I}g(i)=\varnothing$，反之，是否对于任一集合 I，且任一 i, $i\in I$, $g(i)\neq\varnothing$，就一定有 $\prod_{i\in I}g(i)$ 不空呢？乘积定理可以回答这一问题．

乘积定理 对于任意的集合 I 和以 I 为定义域的任一函数 g，如果对于 I 中任一元 i，都有 $g(i)\neq\varnothing$，则

$$\prod_{i\in I}g(i)\neq\varnothing.$$

证明 现在假定 I 与 g 满足定理的前提，即 I 为一标号集合，g 为一函数且有

$$\mathrm{dom}(g)=I,\text{对于每一 } i\in I,\ g(i)\neq\varnothing$$

我们定义一关系 R 如下

$$R:=\{\langle i,x\rangle\,|\,i\in I\wedge x\in g(i)\}.\tag{11.17}$$

由此就有 $\mathrm{dom}(R)=I$，再使用在第九章陈述的选择公理，存在一函数 f，使得

$$f\subset R,\tag{11.18}$$

$$\mathrm{dom}(f)=\mathrm{dom}(R)=I.\tag{11.19}$$

由此，对于任一 $i\in I$ 我们有

$$\langle i, f(i)\rangle \in f \subset R. \tag{11.20}$$

由 (11.17) 我们有 $f(i)\in g(i)$，这样定义的函数 f，满足 $f\in \prod_{i\in I} g(i)$. 所以 $\prod_{i\in I} g(i)\neq\varnothing$. 所以，欲证结果成立.

这一乘积定理是很基本的，它和选择公理在逻辑上是等价的，也就是当我们把乘积定理作为公理，我们可以推演出选择公理作为一定理（见习题 8）. 因此，有时也把它称为选择公理(形式 II).

习　　题

1. 令 $S=\{2,3\}$，$u=\{\{2\},\{3\}\}$. 计算 $u\uparrow S$，并作出 $u\uparrow S$ 的表示矩阵和表示树.

2. 令 $S=\{2,3,5\}$，$u=\{1,4\}$. 计算 $u\uparrow S$，并作出 $u\uparrow S$ 的表示矩阵和表示树.

3. 作出 $4\uparrow 2$ 的表示树.

4. 作出 $2\uparrow 4$ 的表示树.

5. 作出 $3\uparrow 4$ 的表示树.

6. 令 $g(0)=\{2,3\}$，$g(1)=\{4\}$，$g(2)=\{1,2,4\}$

(1) 枚举 $\prod_{i\in 3} g(i)$.

(2) 作出 $\prod_{i\in 3} g(i)$ 的表示矩阵.

(3) 作出 $\prod_{i\in 3} g(i)$ 的表示树.

7. 对 §3 例 12 中定义的 F，试作出表示 $F\uparrow 5$ 的树.

8. 把乘积定理作为一公理，试证明，对于任一关系 R，都有一函数 f，使得

(1) $\mathrm{dom}(f)=\mathrm{dom}(R)$，

(2) $f\subset R$

成立（也就是由乘积定理推演出选择公理成立）.

第十二章　偏序结构与良基关系

本章讨论偏序结构与良基关系，这两个重要概念具有广泛的背景，因而，应用面也很广泛．本章§1先从若干例子开始讨论弱偏序结构．§2讨论强偏序结构，并进而引入偏序结构．§3引进有关的基本概念，它们对本章和以后几章都是重要的.我们给出它们的严格的定义，而且通过若干例子，通过关系的图形、矩阵表示方法，给出这些基本概念的形象说明．§4讨论极小元与极大元．§5讨论线序结构与链和伪树的概念．§6讨论良基关系，给出了良基关系与降链的相联系的定理，为此引入了一个含意深刻的概念——依赖选择原则．最后我们在§7中引进了树的概念．这是在数学理论和计算机科学中应用广泛的一个基本概念．

§1　弱　偏　序

首先，我们重新考察任意的集合 S 上的包含关系．比如，令 $S=P(S_1)$，其中 S_1 为任意的集合．这时，正如我们已指出的那样，包含关系 $\subset$ 是 S 上的一关系，为了醒目，有时，我们也写做 $\subset_S$．对于任意的集合 $x\in S$，$y\in S$，$z\in S$，我们有：

(1) $x\subset x$，

(2) $x \subset y \wedge y \subset z \to x \subset z$,

(3) $x \subset y \wedge y \subset x \to x = y$.

(1)表示关系$\subset$在S上是自反的；(2)表示关系$\subset$在S上是传递的，(3)表示关系$\subset$在S上是反对称的.

上述(1)—(3)这三条性质，使我们看到关系$\subset$在一定意义下把集合S的元排了一个次序．因为 $\varnothing \in S$，$S_1 \in S$，并且对于任一集合$x \in S$，都有 $\varnothing \subset x$ 和 $x \subset S_1$． 所以空集合$\varnothing$排在最前边，或者说$\varnothing$最小．而S_1排在最后边，或者说它最大．当 $S_1 \neq \varnothing$ 时，比如 $S_1 = 4$ 时，有：

(1) $\varnothing \subset 1 \subset 2 \subset 3 \subset 4$,

(2) $\varnothing \subset \{1\} \subset 2 \subset 3 \subset 4$,

(3) $\varnothing \subset \{1\} \subset \{1, 3\} \subset \{0, 1, 3\} \subset 4$,

(4) $\varnothing \subset \{2\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} \subset 4$,

(5) $\varnothing \subset \{3\} \subset \{2, 3\} \subset \{0, 2, 3\} \subset 4$,

……

其中 $x \subset y \subset z := x \subset y \wedge y \subset z$． 上述各条都表明该条内所涉及的五个集合在$\subset$关系下的一次序．例如(3)表明 $\varnothing$，$\{1\}$，$\{1, 3\}$，$\{0, 1, 3\}$ 及 4 这五个集合之间的次序（在包含关系之下）．但是有一些集合，他们之间在包含关系$\subset$之下没有次序关系，比如，$\{1\}$与$\{2\}$既非$\{1\} \subset \{2\}$，又非$\{2\} \subset \{1\}$(参见第六章图 3 及相应的说明)．一部分集合有关系$\subset$，一部分集合之间没有关系，并且满足条件(1)—(3)，我们就称包含关系$\subset$为S上的一偏序(有时也称它是一弱偏序)．条件(1)是说，S中的任一元x，x与它自身有这一关系．因此，这叫做$\subset$在S

上有自反性．条件(2)是说，S 中任意的元素 x, y, z，若 x 包含在 y 之中，y 包含在 z 中，这时 x 就包含在 z 中，这就是我们在第一章中讲的包含关系的传递性．条件(3)是外延公理的一种陈述形式，也就是说，只有在 x 与 y 相等时，才可能有 x 包含在 y 中，并且 y 也包含在 x 之中．上述条件(1)，(2)，(3)对于刻划一集合上的关系是有它的代表性的．

现在，我们令集合 $S=\{0,1,2,3,\{0,4\},\{0,4,5\}\}$，并考察 S 上的包含关系 $\subset$．为了醒目，我们先把凡是 S 中的两个元素有包含关系 $\subset$ 的都用有向线段连接起来．每一元 x，自身用带箭头的半圆相连接，因为都有 $x\subset x$ 成立．由此获得图 1．很显然，这里满足上述条件(1)，(2)，(3)．

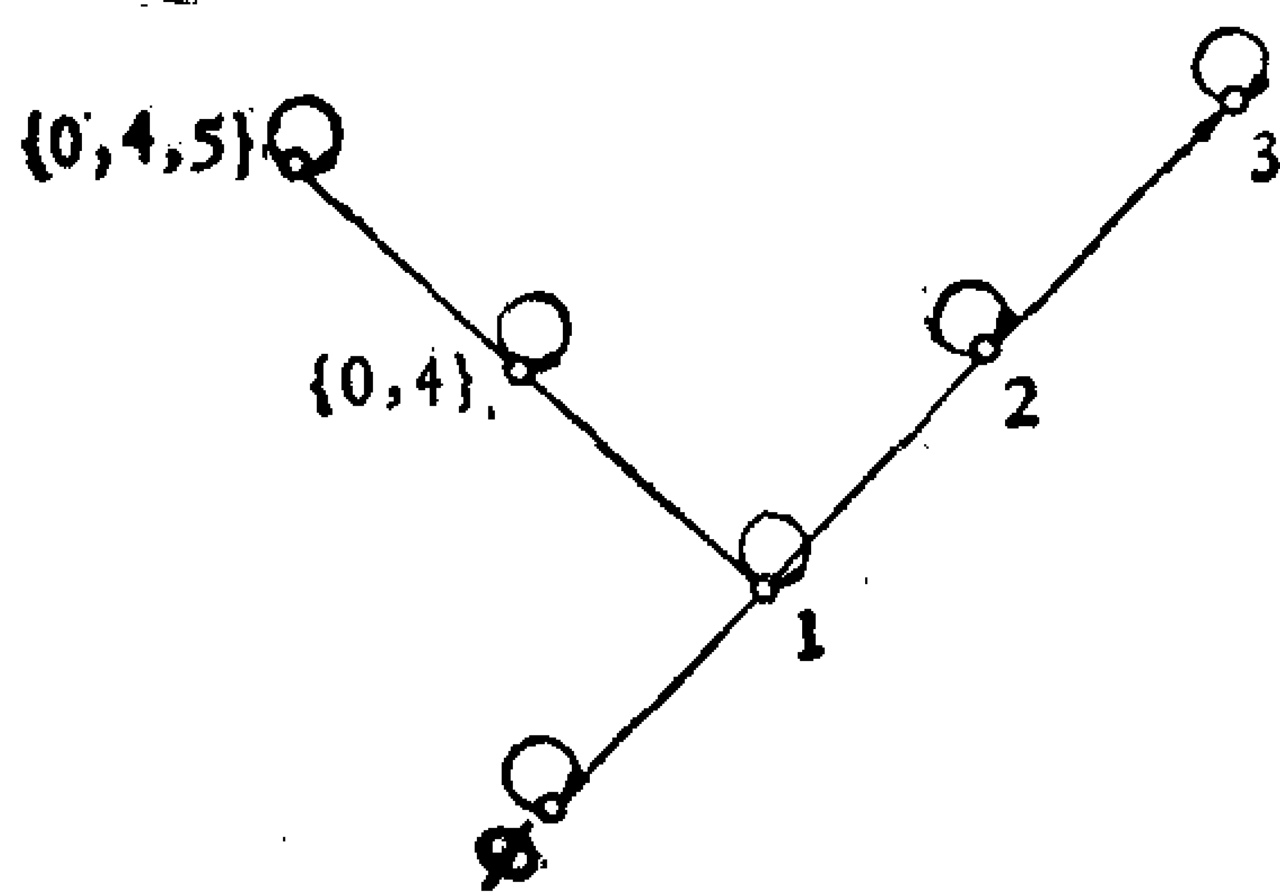


图 1

其次，我们令 $S=\{2,3,6,7,8,12,16,18,32\}$，并且对于任意的元 x, $y\in S$，令

$$xRy\longleftrightarrow\exists z\in\omega(y=z\cdot x).$$

为了醒目，我们把集合 S 中凡有 R 关系的任意两个元素，都用有向直线相连接，任一数自己能整除自己，即自己对自己满足 R 关系，用半圆表示．这样，就获得图 2．很显然，对于

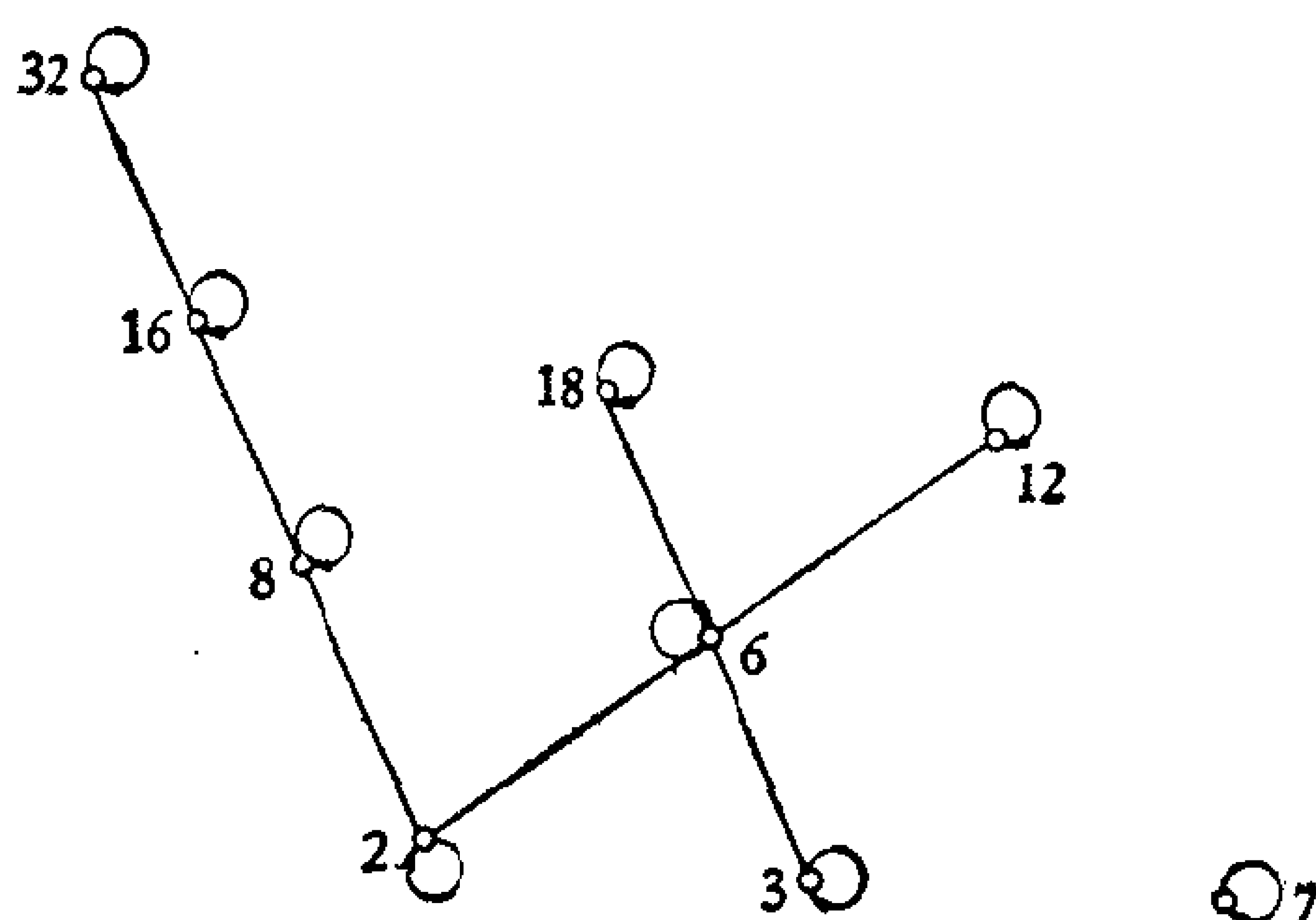


图 2

任意的 $x, y, z \in S$，关系 R 满足如下的条件：

(1) xRx，

(2) $xRy \wedge yRz \to xRz$，

(3) $xRy \wedge yRx \to x = y$.

人们常常把上述定义的关系 R 叫做整除关系，它也规定了集合 S 的一种偏序(也是一种弱偏序).

定义 12.1 令 R 是集合 S 上一关系，即，$R \subset S \times S$，如果对于任意的 $x, y, z \in S$，都有：

(1) xRx，

(2) $xRy \wedge yRz \to xRz$，

(3) $xRy \wedge yRx \to x = y$.

则我们称 R 为集合 S 上的一弱偏序.

当关系 R 为集合 S 上的一弱偏序时，我们也称有序对 $\langle S, R\rangle$ 为一弱偏序结构.

例 1 当 S_1 为任一集合时，令 $S = P(S_1)$，则 $\langle S, \subset_s\rangle$ 为

一弱偏序结构.

例 2 令 $S=\{0,1,2,3,\{0,4\},\{0,4,5\}\}$，这时，有序对 $\langle P(S),\subset_s\rangle$ 为一弱偏序结构.

例 3 令 S 为一不空集合，$\langle P(S),\subset_s\rangle$ 是一弱偏序结构.

例 4 令 $S=\{2,3,6,7,8,12,16,18,32\}$，并且 R 为整除关系，即，对于任意 $x,y\in S$

$$xRy\longleftrightarrow\exists z\in\omega(y=z\cdot x).$$

这时，有序对 $\langle S,R\rangle$ 为一弱偏序结构，R 为 S 上一弱偏序关系.

§2 强偏序、偏序

定义 12.2 令 S 为任一集合，R 为 S 上一关系，即，

$$R\subset S\times S,$$

如果对于任意的 $x,y,z\in S$，都有:

(1) $x\overline{R}x$（即$\neg(xRx)$），

(2) $xRy\wedge yRz\rightarrow xRz$，

(3) $xRy\rightarrow y\overline{R}x$.

则称 R 为集合 S 上的一强偏序. 其中条件 (1) 称做 R 是非自反的，条件(2)仍然称做 R 是传递的，条件(3)称做 R 是非对称的. 当关系 R 为集合 S 上的一强偏序时，我们称有序对 $\langle S,R\rangle$ 为一强偏序结构.

例 5 可以验证，$\langle\omega,\in_\omega\rangle$ 是一强偏序结构，其中

$$\in_{\omega}:=\{\langle x, y\rangle | x\in\omega\wedge y\in\omega\wedge x\in y\}.$$

因为 $\langle\omega, \in_{\omega}\rangle$ 满足定义 12.2 的三个条件. 即:

(1) 对于任意 $x\in\omega$ 都有 $x\not\in x$ 成立(定理 4.1).

(2) 对于任意的 $x, y\in\omega$, 我们都有

$$x\in y\wedge y\in z\rightarrow x\in z$$

成立(定理 5.4).

(3) 对于任意的 $x, y\in\omega$, 都有

$$x\in y\rightarrow y\not\in x$$

成立(定理 5.5).

例 6 自然数的小于关系, 即 $\langle\omega, <_{\omega}\rangle$ 是一强偏序结构,其中

$$<_{\omega}:=\{\langle x, y\rangle | x\in\omega\wedge y\in\omega\wedge x<y\}.$$

显然, 这是例 5 的另一种表达方式, 也是一种通俗的陈述方式.

例 7 自然数的大于关系, 即 $\langle\omega, >_{\omega}\rangle$ 是一强偏序结构,其中

$$>_{\omega}:=\{\langle x, y\rangle | x\in\omega\wedge y\in\omega\wedge y<_{\omega}x\}.$$

读者不难验证大于关系 $>_{\omega}$ 满足定义 12.2 的三个条件.

例 8 自然数的严格整除关系,即 $\langle\omega, |_{\omega}\rangle$ 是一强偏序结构,其中

$$|_{\omega}:=\{\langle x, y\rangle | x\in\omega\wedge y\in\omega\wedge\exists z(z>1\wedge y=x\cdot z)\}.$$

容易验证,这一关系满足定义 12.2 的三个条件. 对于这一结构, 我们没有办法用图形完全表示出来, 因为 ω 有无穷多元素,并且 $|_{\omega}$ 也是有无穷多个元素. 但是,我们可以给出表示

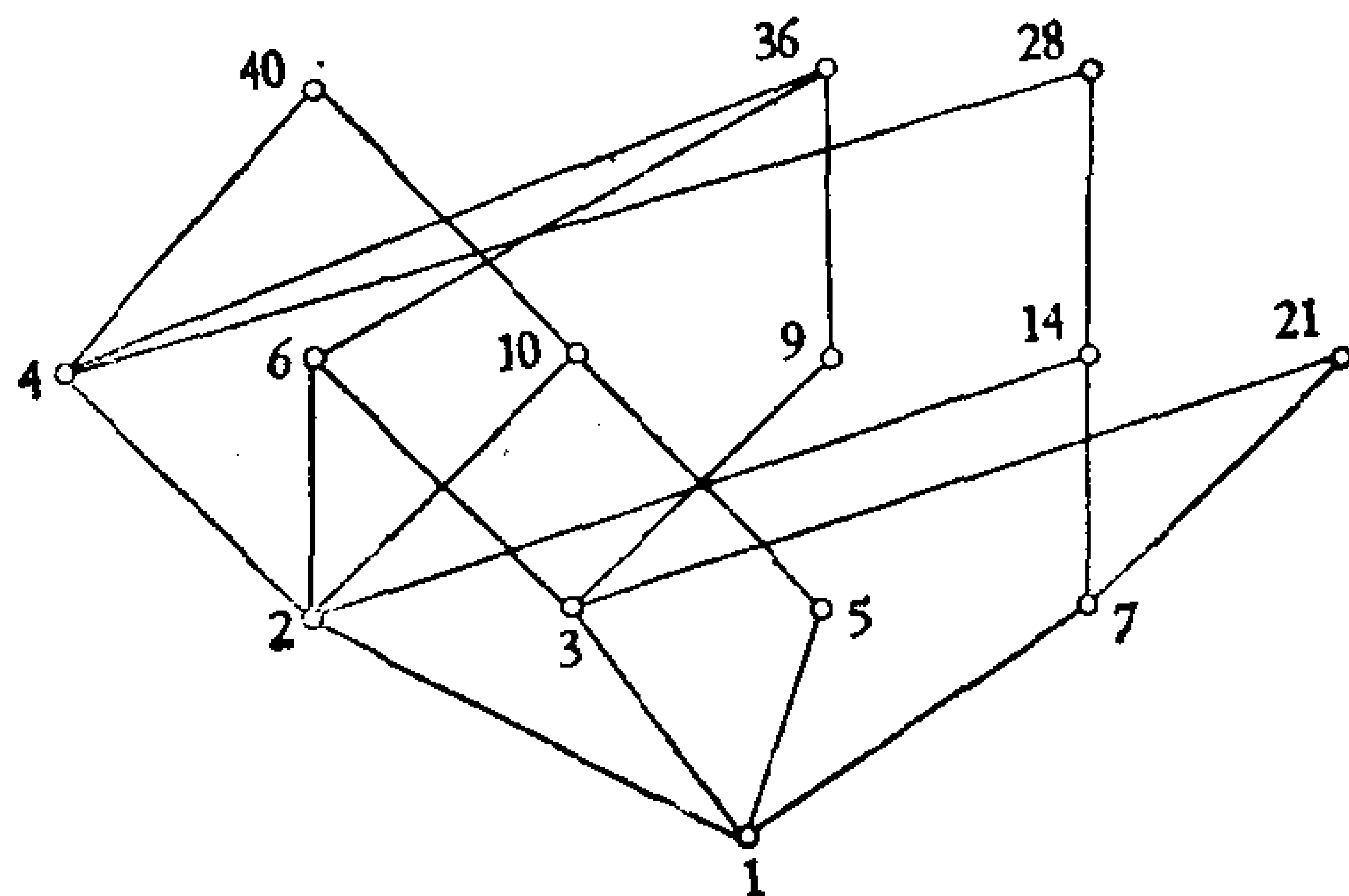


图 3　严格整除关系部分图

$|_\omega$ 的一个部分图(参见图 3).

由上边例子可以看出,由例 1 ,2, 3 中我们把包含关系⊂换成严格的包含关系 $\subset_+$, 即获得 $\langle P(S_1), \subset_+\rangle$ 三个严格偏序关系.例如,就例 2 而言,我们就得如图 4 所示,它是一严格的偏序结构,并且一般说来,对于每一个弱偏序结构都可以得一个强偏序结构.

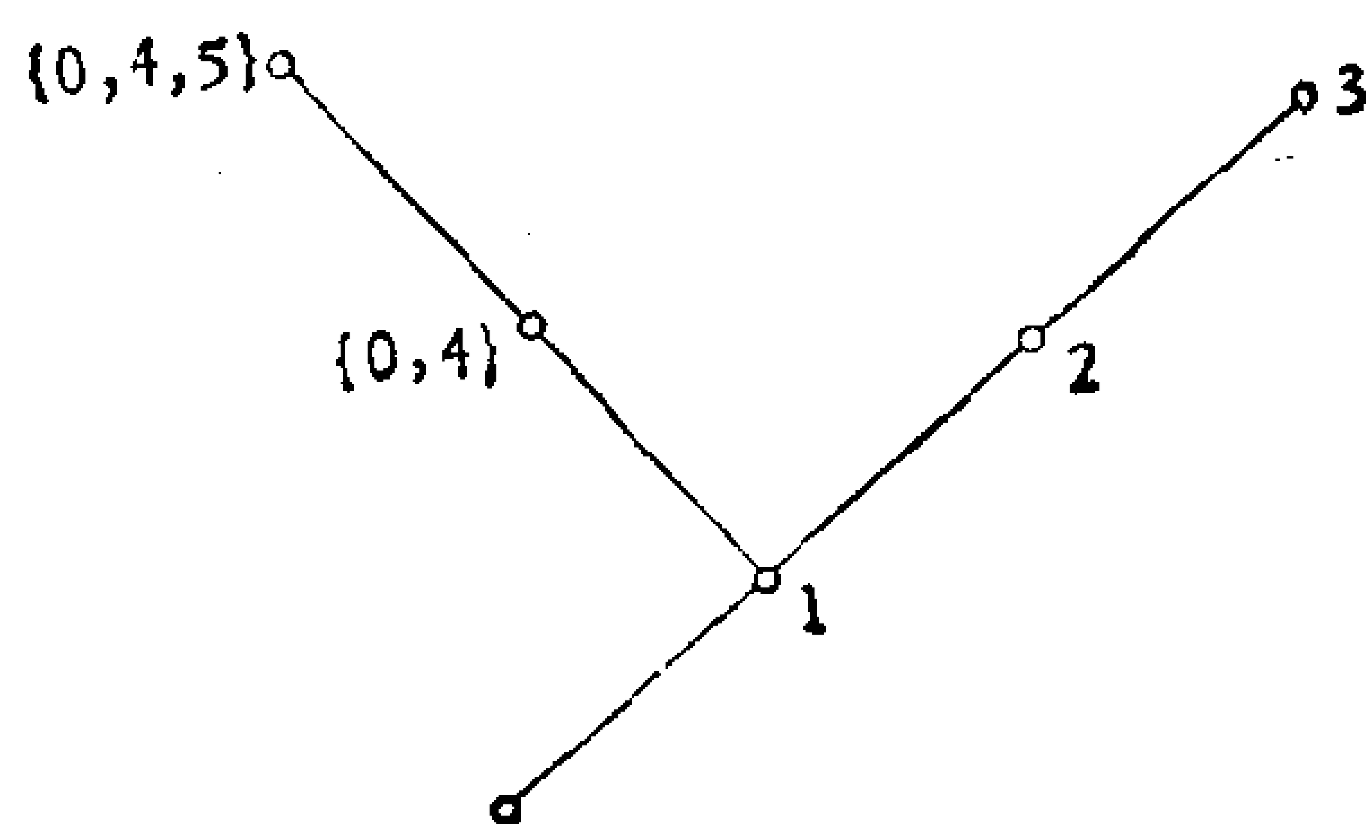


图　4

定理 12.1 若 $\langle S, R_1\rangle$ 是一弱偏序结构，那么 $\langle S, R_2\rangle$ 为强偏序结构,其中

$$R_2 := \{\langle x, y\rangle \mid xR_1y \wedge x \neq y\}. \qquad (12.1)$$

证明 由(12.1)式，R_2 显然满足定义 12.2 的条件(1)与(2),现在来证明 R_2 是非对称的，即对于任意的 $x, y \in S$，都有

$$xRy \to y\bar{R}x, \qquad (12.2)$$

假定不然，我们有 xR_2y 与 yR_2x 同时成立．因此就有 xR_1y 与 yR_1x 同时成立．这时,由 R_1 满足定义 12.1(3)，所以有 $x = y$．又因为有 xR_2y,且由(12.1)式,此时不能有 $x = y$，这就产生一矛盾．所以(12.2)成立,即 R_2 是非对称的．

定理 12.2 若 $\langle S, R_1\rangle$ 是一强偏序关系,则 $\langle S, R_2\rangle$ 是一弱偏序关系,其中

$$R_2 := \{\langle x, y\rangle \mid xR_1y \vee x = y\}. \qquad (12.3)$$

证明 由 R_1 的条件及(12.3)式，R_2 显然是自反的和传递的，我们仅须证明 R_2 是反对称的，即 R_2 满足定义 12.1 的条件(3)．对于任意的 $x, y \in S$，我们假定有 xR_2y 且 yR_2x，因为 R_1 非对称，即 xR_1y 与 yR_1x 不能同时成立．所以，有 $x = y$．即 R_2 是反对称的．

定义 12.3 令 R 为集合 S 上一关系,即，$R \subset S \times S$,如果对于任意的 $x, y, z \in S$，都有：

(1) $xRy \wedge yRz \to xRz$，

(2) $xRy \wedge yRx \to x = y$.

则称 R 为集合 S 上一偏序．

当R为S上的一偏序关系时，我们也称有序对$\langle S, R\rangle$为一偏序结构．有时也称S为一有序集合．

定理 12.3 （1）若有序对$\langle S, R\rangle$为一弱偏序结构，则$\langle S, R\rangle$是一偏序结构．

（2）若有序对$\langle S, R\rangle$为一强偏序结构，则$\langle S, R\rangle$是一偏序结构．

证明 (1)是显然的．对于(2)，仅须证明(2)也满足定义12.3中的条件(2)，即反对称性． 因为定义12.1的定义(3)是说，对于任意$x, y\in S$，都有

$$xRy \to y\bar{R}x.$$

因此，就不能有$(xRy\wedge yRx)$成立，即

$$xRy\wedge yRx$$

恒假，所以，我们有

$$xRy\wedge yRx\to x=y$$

为真命题，即R是反对称的．

§3 序的基本概念

为了讨论各种类型的关系，我们重述和定义一些基本概念．这些概念对于我们对关系进行分类，弄清各类关系的性质具有重要的作用．令R为S上的一关系，我们有下述基本概念．

I　令R为S上的一个关系，如果对于每一$x\in S$，都有xRx成立．即

$$\forall x \in S\ xRx.$$

也就是$I_s \subset R$，其中$I_s := \{\langle x, x\rangle | x \in S\}$，则称关系$R$为自反的.

当S为一有穷集合时，关系R在S上是自反的，当且仅当R的表示矩阵的主对角线上全是1.

例9 令$S := \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，$R$为$S$上的一关系，按约定给出表1的表示矩阵$M(R)$，$M(R)$的主对角线上都是1，因此$R$在$S$上是一自反关系.

表 1

a_iRa_j	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	0	0
a_2	0	1	1	1
a_3	0	1	1	0
a_4	0	1	0	1

$$M(R) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II 令R为集合S上的一个关系，如果有

$$\forall x \in S\ \overline{xRx}，即\ \forall x \in S(\neg R(x_1, x)),$$

也就是$I_s \cap R = \varnothing$，则称关系R为非自反的.

有穷集合S上一关系R为非自反的，当且仅当R的表示矩阵$M(R)$的主对角线全为0.

例10 令$S := \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，$R$为$S$上的一关系，按约定记号，它的表示矩阵$M(R)$为

$$M(R):=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

由于 $M(R)$ 的主对角线上均为 0，所以关系 R 在 S 上是非自反的.

我们已经多次使用图形表示关系，现在，我们再引入一类图形，以作为表示有穷集合上的关系的一种工具. 设

$$S=\{a_1,\cdots,a_n\},$$

给定 S 上一关系 R. 首先在平面上划一些小圆圈"∘"以表示 S 的元素，并且分别标上这些元的名称. 然而，当 a_iRa_j 成立时，在由 a_i 到 a_j 连上有向的圆弧. 下边我们以此方法画例 9 的图形（图 5）和例 10 的图形（图 6），有时也称这种图为平面有向图. 显然，自反关系是 S 的每一元都有自身到自身的圆环，而非自反的关系是任一点都不能有到自身的圆环.

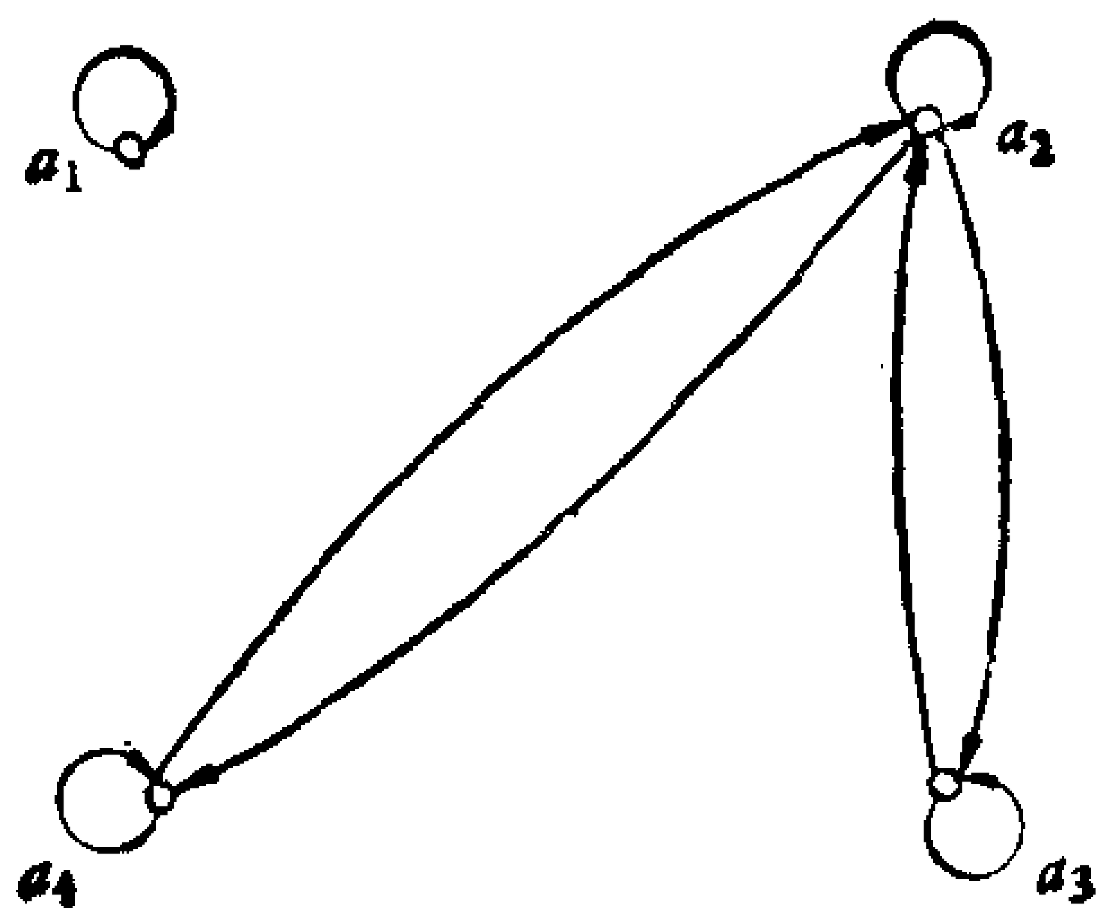


图 5

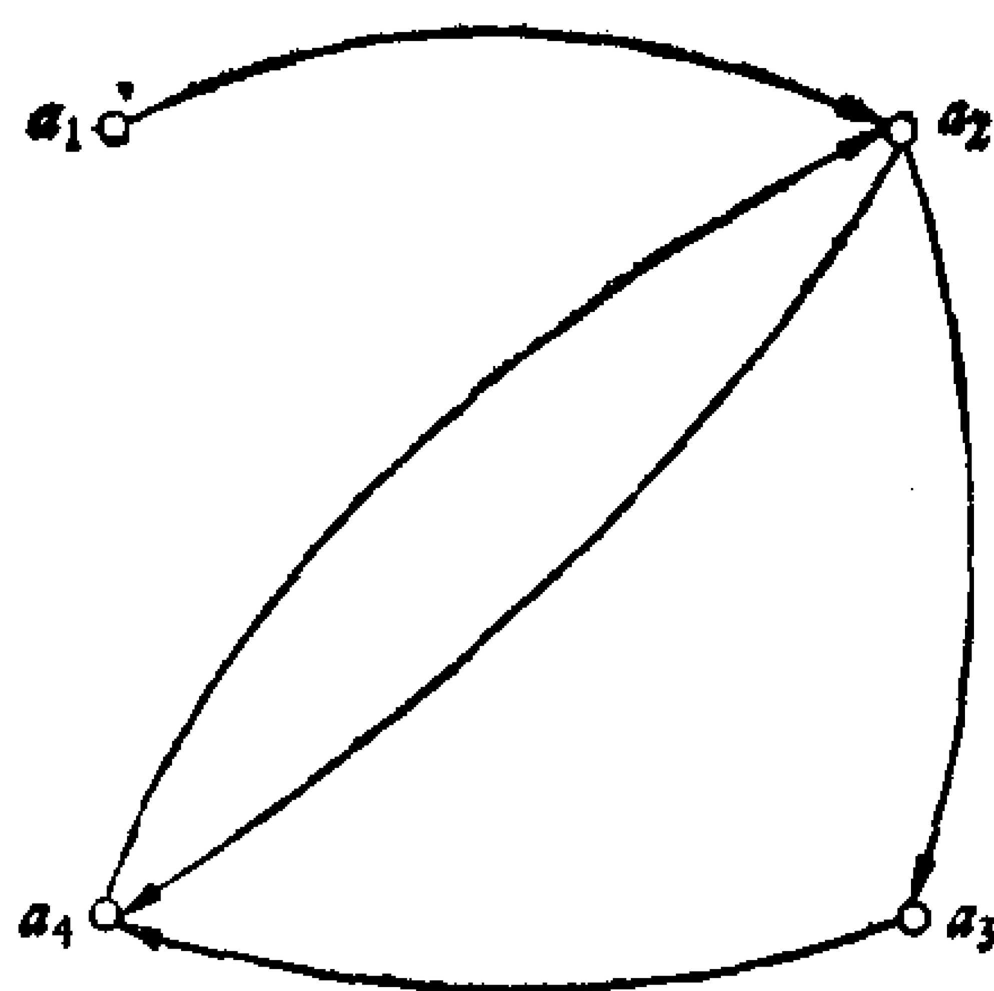


图 6

Ⅲ　令R为集合S上的一个关系，如果有：

$$\forall x \in S \forall y \in S \forall z \in S(xRy \land yRz \rightarrow xRz),$$

也就是$R \circ R \subset R$，则称关系R为传递的.

Ⅳ　令R为集合S上的一个关系，如果有

$$\forall x \in S \forall y \in S \forall z \in S(xRy \land yRz \rightarrow x\bar{R}z),$$

也就是$R \circ R \subset (S \times S \dot{-} R)$，则称关系$R$为非传递的.

传递性表示，S中任意三元素a_i, a_j, a_K，只要有a_iRa_j和a_jRa_K，就一定有a_iRa_K，而非传递性则相反，即，在同样的前提下就一定不能有a_iRa_K成立.

例 11　令$S=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，R_1, R_2为S上的两个关系．我们用有向图表示这两个关系R_1与R_2（图7与图8）．由图7与图8可知，R_1是传递的，R_2是不传递的.

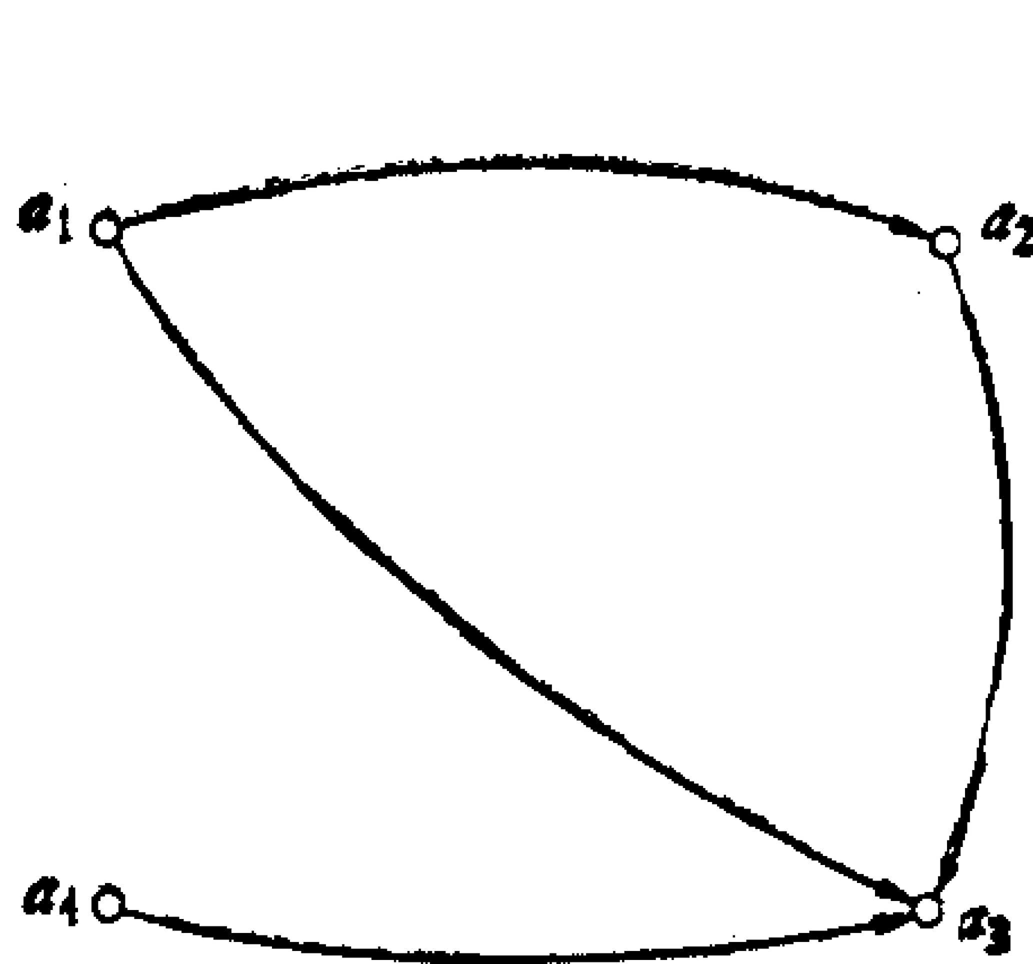


图 7

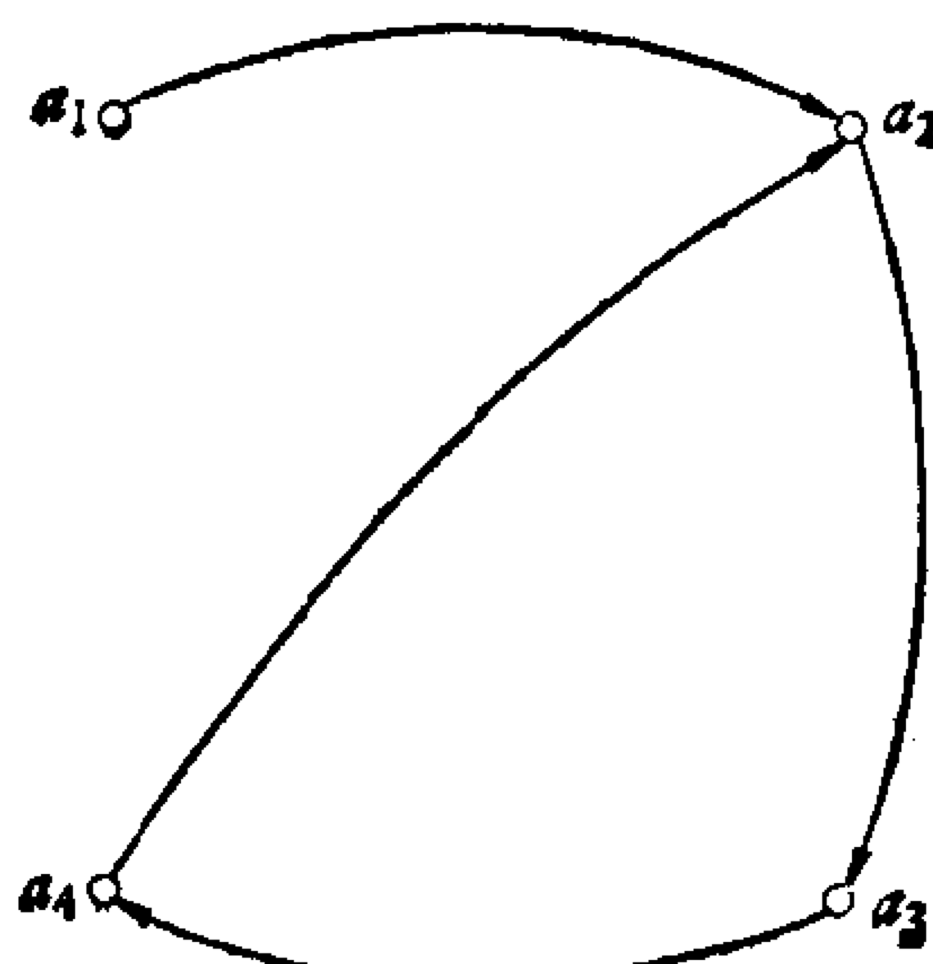


图 8

Ⅴ　令R为集合S上的一个关系，如果我们有

$$\forall x \in S \forall y \in S(xRy \rightarrow yRx),$$

也就是$R^{-1}=R$，则称关系R是对称的.

VI 令 R 为集合 S 上的一个关系 R，如果我们有

$$\forall x \in S \forall y \in S(xRy \rightarrow y\bar{R}x),$$

也就是说，$R \cap R^{-1} = \varnothing$，则称关系 R 为非对称的.

VII 令 R 为集合 S 上的一个关系，如果有

$$\forall x \in S \forall y \in S(xRy \wedge yRx \rightarrow x = y),$$

也就是说，$R \cap R^{-1} \subset I_s$，则称关系 R 为反对称的.

现在，我们使用矩阵法和平面有向图来表达有穷集合上的一关系的对称性，非对称性和反对称性关系的这三个基本概念。

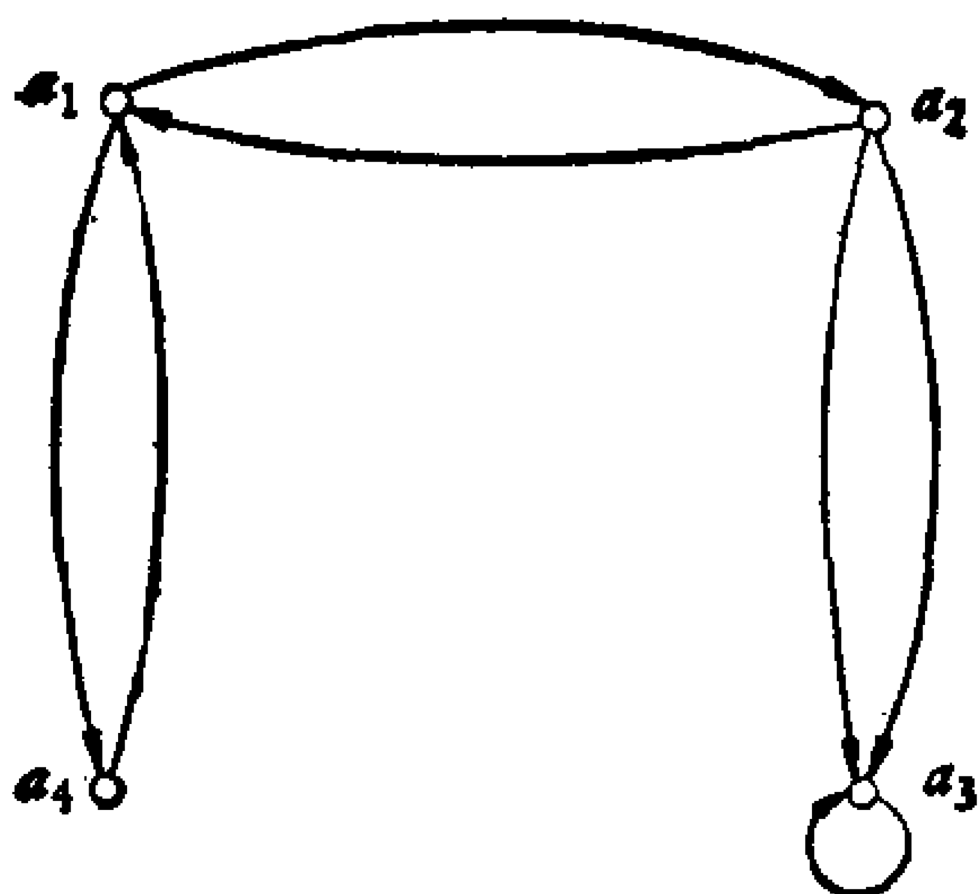


图 9 对称关系

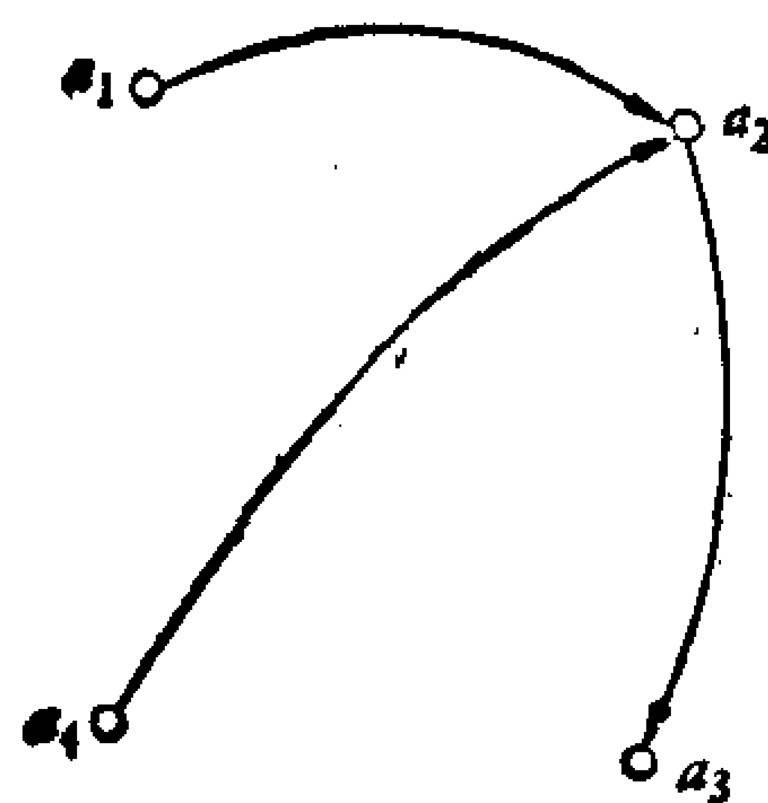


图 10 非对称关系

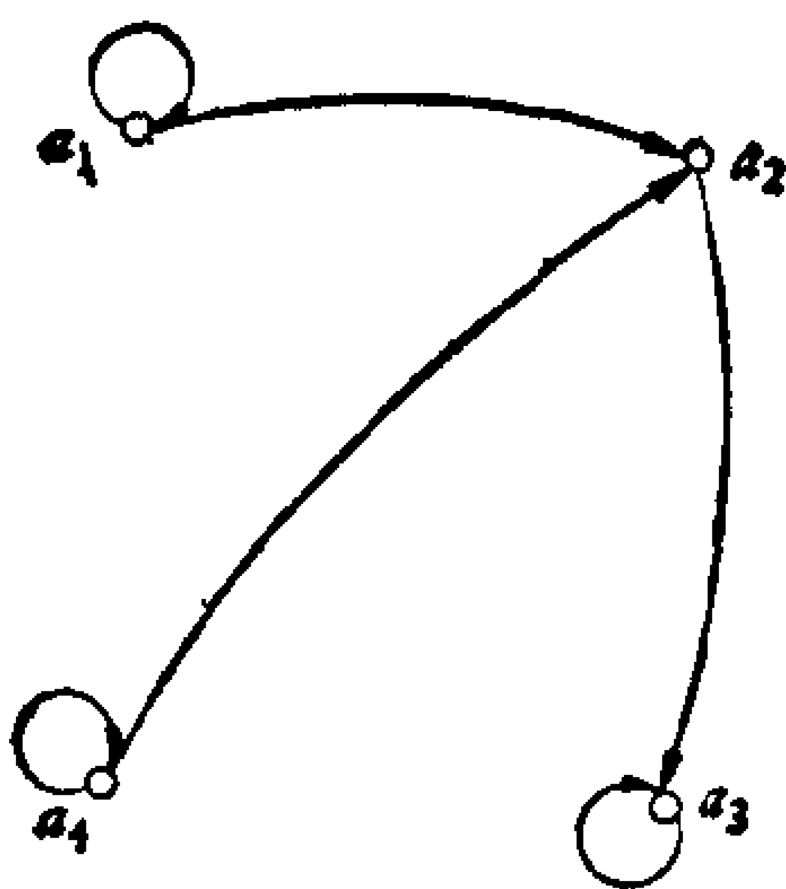


图 11 反对称关系

例12 令 $S=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，R_3，R_4，R_5 为 S 上的三个关系．我们首先用画有向图的方法刻划出这三个关系（图9、10、11）．然后再给出它们的表示矩阵．

$$M(R_3)=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}, \quad M(R_4)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$M(R_5)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

不难看出，对称关系的表示矩阵是对称矩阵，即以主对角线为对称轴，矩阵的任二对称点的值相同；主对角线上可以为1，也可以为0．非对称关系的表示矩阵对角线上全为0，以主对角线为对称轴，矩阵的任二对称点不能同时为1．反对称关系的表示矩阵的主对角线上可以为1，也可以为0，以主对角线为对称轴，矩阵的任二对称点不能同为1．

从有向图的角度来看，表示对称关系的有向图中任两个不同点 a_i 与 a_j 之间，若存在有向圆弧就必须成对出现（方向相反），非对称关系与反对称关系都不允许这种情况，即任两个不同点之间至多有一条弧线（可能一条也没有）．对于任一点 a，对称关系与反对称关系都允许有到它自身的圆环弧线，非对称关系则不允许这种圆环．

VIII 令 R 是集合 S 上的一个关系，如果有

$$\forall x \in S \forall y \in S(xRy \vee x = y \vee yRx),$$

也就是说，$R \cup I_s \cup R^{-1} = S \times S$. 则称关系$R$为连通的(或连接的).

例 13 令 $S = \{a_1, a_2, a_3\}$, R_6, R_7 为S上的两个关系. 它们的有向图为图 12、13，可以验证，它们是R连接的，并且也可以从表示矩阵上一眼看出一关系是R连接的. 那就是除主对角线可取 0 值也可以取 1 值以外，以主对角为对称轴的任意两个对称点，至少有一点取 1 值（也可能两个点都取 1 值）. 因此，有这种性质的表示矩阵我们也可以称为连通矩阵.

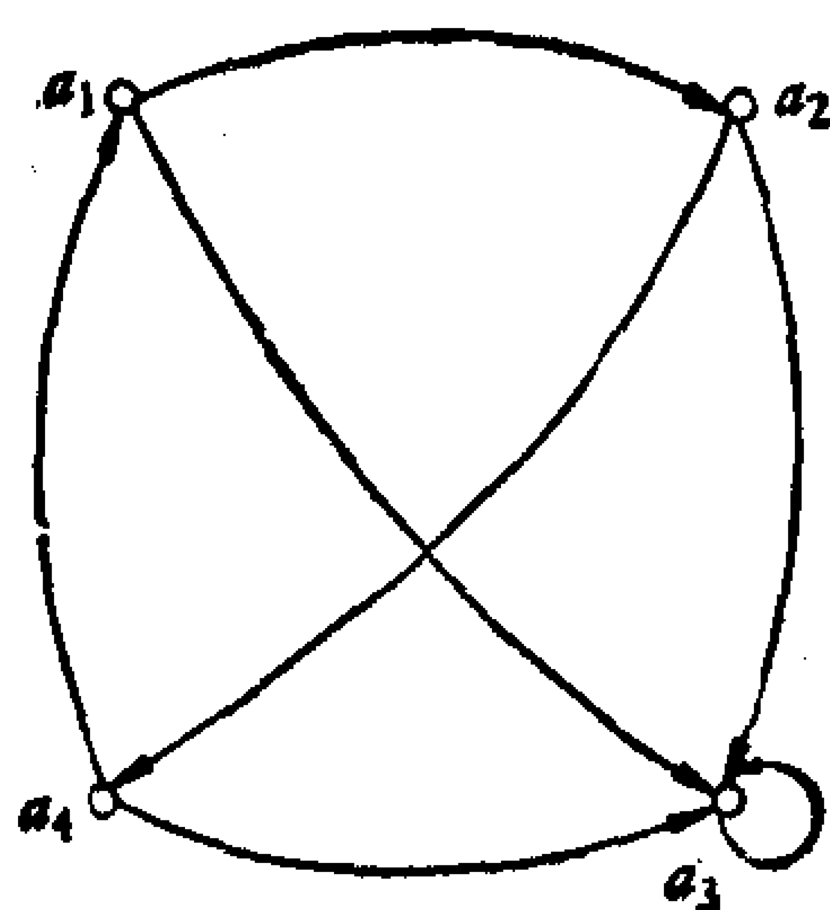


图 12 连通关系

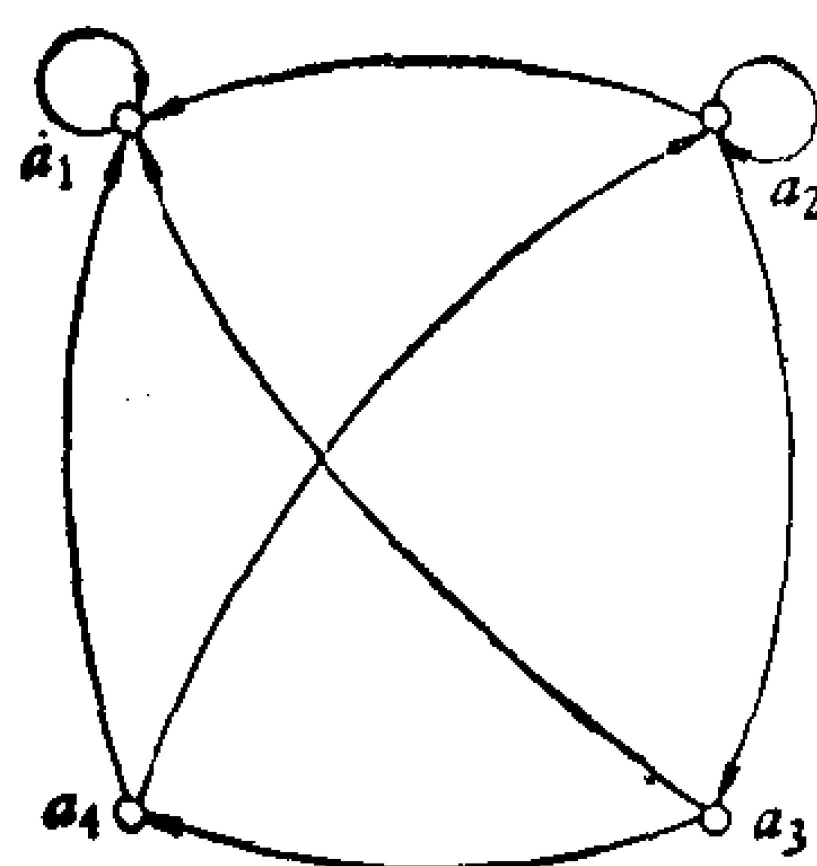


图 13 连通关系

$$M(R_6) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(R_7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

上述八条是对关系的基本刻划，有些条款所刻划的性质是相反的，一个关系对二者至多只能具备其一（如 I 与 II，III 与 IV 等）. 有些条款是相互补充的. 它们的组合就引进了

各种不同关系，如偏序，弱偏序，强偏序等等，还要应用它们的组合去刻划其它一些重要的关系。

§4 极小元与极大元

定义 12.4 对于任意的弱偏序结构 $\langle S, R\rangle$，如果不存在 x 使得 $x\in S$，$x\neq a$ 且 xRa，即对于所有的 $x\in S$，若 $x\neq a$，则 $\langle x, a\rangle\notin R$，则称 $a\in S$ 为 S 中对于关系 R 的一极小元。

定义 12.5 对于任意的强偏序结构 $\langle S, R\rangle$，如果不存在 x，使得 xRa 成立，则称 S 中的元素 a 为对于关系 R 的一极小元。

据上述两个定义，比如例 2 元素 0 是结构 $\langle S, \subset_s\rangle$ 的一个极小元。对于结构 $\langle S, \subset_+\rangle$，0 也是一极小元。$S$ 中的其它元素不是结构 $\langle S, \subset_s\rangle$ 和 $\langle S, \subset_+\rangle$ 的极小元。对于第九章例 4 中的 S，R_1 为严格整除关系时，对于结构 $\langle S, R_1\rangle$ 而言，自然数 2，3，7 $\in S$，都是 S 中关于 R_1 的极小元，S 中的其它元都不是 R_1 的极小元。当 R_2 为整除关系时，对于结构 $\langle S, R_2\rangle$ 而言，自然数 2，3，7 $\in S$ 也都是关系 R_2 的极小元，S 中的其它元都不是 R_2 的极小元。

定义 12.6 对于任意的偏序结构 $\langle S, R\rangle$，如果对于任意的 $x\in S$，都有

$$x = a \vee aRx$$

成立，则称 a 为 S 的一个 R- 最小元。不致产生混淆时，可简称 a 为 S 的最小元。

例 14　对于任意集合 S_1，$S=P(S_1)$，在偏序结构 $\langle S, \subset_s\rangle$ 中空集合 $\varnothing$ 是 S 的一最小元.

对于本章例 4 的结构 $\langle S, R\rangle$，S 中没有最小元.

定义 12.7　对于任意的弱偏序结构 $\langle S, R\rangle$，如果在 S 中没有元 x，使得 $x \neq a$ 且 aRx 成立. 即对于所有的 $x\in S$，都有若 $x\neq a$，则 $a\bar{R}x$，则称 a 为 S 的一个极大元.（R-极大元）

定义 12.8　对于任意的强偏序结构 $\langle S, R\rangle$，如果在 S 中没有元 x，使得 aRx 成立，即对于所有的 $x\in S$，都有 $a\bar{R}x$，则称 a 为 S 的一个极大元.

定义 12.9　对于任意的偏序结构 $\langle S, R\rangle$，如果对于任意的 $x\in S$，都有

$$x = a \vee xRa$$

成立，则称 a 为 S 的一个最大元.

对于例 14 中的结构 $\langle S, \subset_s\rangle$ 来说，显然，S_1 是 S 的一个最大元.

§5　线序、链

定义 12.10　对于集合 S 上的任意的关系 R，即

$$R\subset S\times S,$$

如果 R 满足条件 III，VII 与 VIII. 即 R 在 S 上是传递的，反对称的且 R 连接的，则称有序对 $\langle S, R\rangle$ 为一线序结构，或称全序结构.

定义 12.11 $\langle S, R\rangle$ 为一线序结构，并且关系 R 在 S 上是自反的，我们就称 $\langle S, R\rangle$ 为一弱线序结构.

定义 12.12 $\langle S, R\rangle$ 为一线序结构，并且关系 R 在 S 上是非自反的，我们就称 $\langle S, R\rangle$ 为强线序结构.

当 $\langle S, R\rangle$ 为一线序结构时，我们也称关系 R 线序了集合 S，有时也称 R 全序 S，或 S 是一线序集合或 S 是一全序集合.

由定义 12.1—12.3 和定义 12.10—12.12，可直接获得下述三条定理.

定理 12.4 若 $\langle S, R\rangle$ 为一线序结构，则 $\langle S, R\rangle$ 是一偏序结构.

定理 12.5 若 $\langle S, R\rangle$ 为一弱线序结构，则 $\langle S, R\rangle$ 为一弱偏序结构.

定理 12.6 若 $\langle S, R\rangle$ 为一强线序结构，则 $\langle S, R\rangle$ 为一强偏序结构.

定义 12.13 假定 R 为 S 上的一关系，若对于任意的 $x \in S$，$y \in S$，下列三式

$$xRy, \quad x = y, \quad yRx \tag{12.4}$$

中恰好有一个成立时，则称 R 对 S 有三岐性，或说 R 对 S 具有三分法的.

定理 12.7 若 $\langle S, R\rangle$ 为一严格的线序结构，则 R 对 S 具有三岐性.

证明 首先，对于任意的 $x \in S$，当然，我们有 $x = x$，并且由于 R 是非自反的，故 xRx 不成立，即 (12.4) 中条件 xRy

与 yRx 都不成立．因此，当 $x=x$ 时，R 对 S 有三歧性．

其次，对于任意的 $x, y\in S$，且 $x\neq y$．这时由于 S 是 R 连接，故总有 xRy 或 yRx 成立．而且由于 R 的反对称性和条件 $x\neq y$，所以，xRy 与 yRx 只能有一个成立．这样就证明了在任何情况下，R 对 S 都有三歧性．

定义 12.14 对于集合 S 上的任一关系 R 和 S 的任意元 a, b，如果有

$$aRb\vee bRa \tag{12.5}$$

成立，则称 a 与 b 是 R 可比较的．

定义 12.15 对于任意的偏序结构 $\langle S, R\rangle$，并且 $S_1\subset S$，如果有

$$\forall x\in S_1\forall y\in S_1(xRy\vee x=y\vee yRx), \tag{12.6}$$

则称 S_1 为 R 可比较的．

定义 12.16 对于任意的偏序结构 $\langle S, R\rangle$，且 $S_1\subset S$，如果 S_1 是 R 可比较的，则称 S_1 为 S 的一 R 链．

例 15 令 $S:=\{0,1,2,3,\{1\},\{1,\{1\}\}\}$，$S_1:=4$，$S_2:=\{0,\{1\},\{1,\{1\}\}\}$，$S_3:=\{\{1\},\{1,\{1\}\}\}$，$S_4:=\{0,1,2,\{1\}\}$，由（12.6）式可以验证 S_1, S_2, S_3 都是 $\subset_s$ 链，而 S_4, S 都不是 $\subset_s$ 链．读者可以找出 S 的其它链和非链．

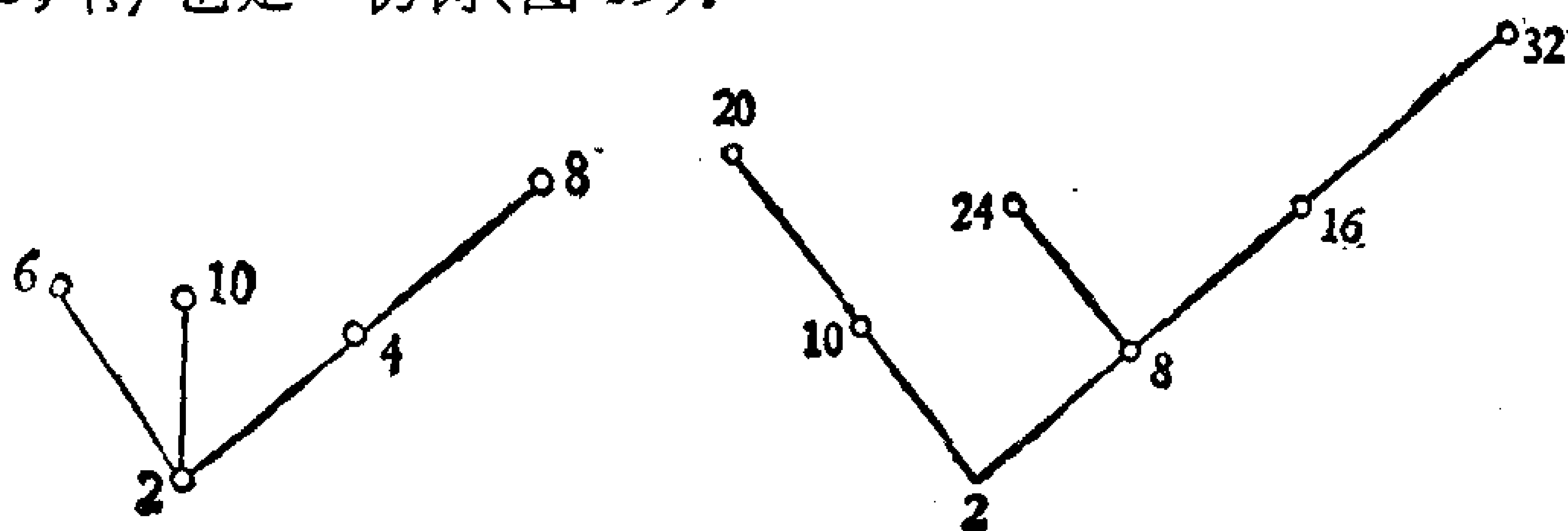
定义 12.17 令 $\langle S, R\rangle$ 为一偏序集合，如果对于每一 $x\in S$，则 x 的 R 前节：

$$O_R(x):=\{y\mid y\in x\wedge y\in S\} \tag{12.7}$$

都是 S 的一个 R 链，则称 $\langle S, R\rangle$ 为一伪树，并称 $O_R(x)$ 为一树枝．

例 16 令 $S=\{2,4,6,8,10\}$，偏序 $\langle S, |_s\rangle$ 是一伪树(图 14)，因为它的任一个元的 $|_s$ 前节都是一 $|_s$ 链. 其中 $|_s := |_\omega \upharpoonright s$.

例 17 令 $S=\{2,8,10,20,16,24,32\}$，偏序集合 $\langle S, |_s\rangle$ 也是一伪树(图 15).



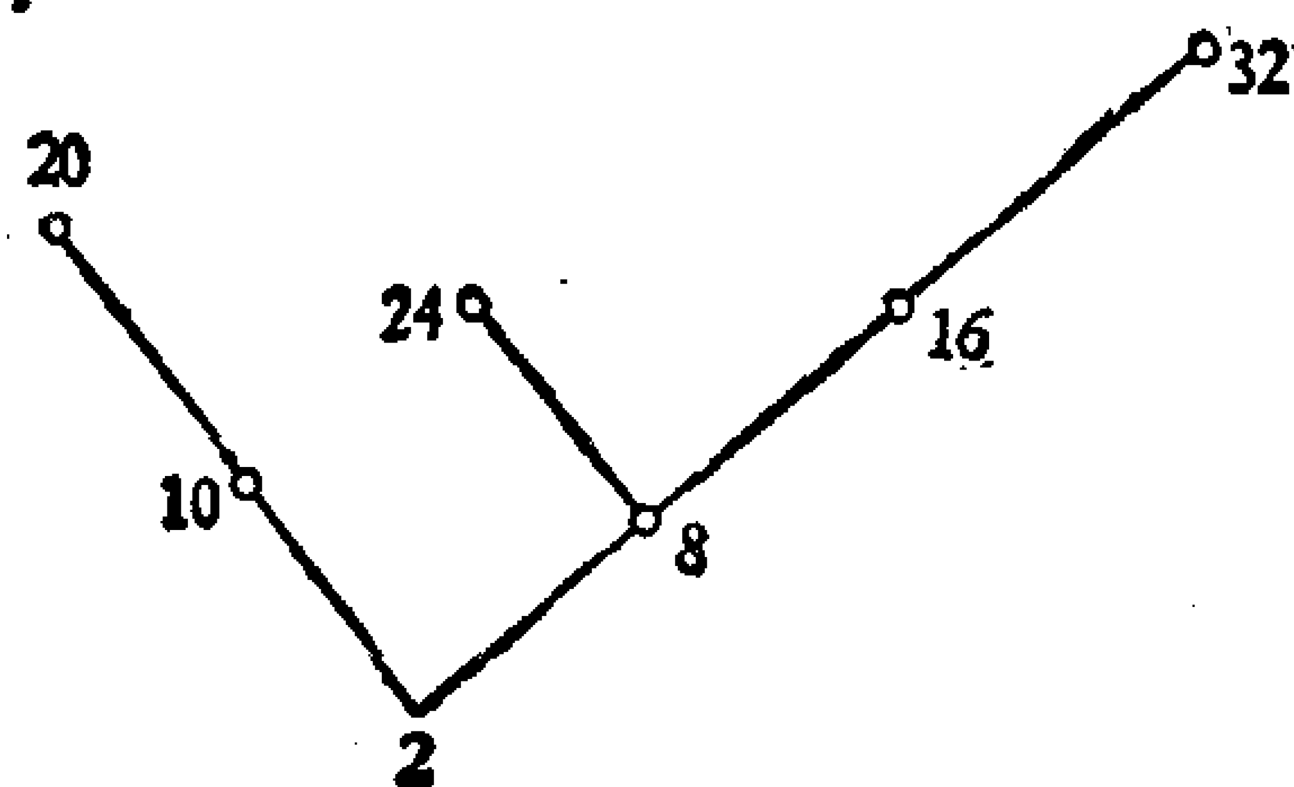


图 14　　　　　图 15

例 18 令 $S=\{2,8,10,16,20,24,32,96\}$，偏序集合 $\langle S,|_s\rangle$ 如图 16 所示，它不是一伪树(图 16). 因为 96 的 $|_s$ 前节 $O|_s(96)=\{32,16,24,8,2\}$，而 24 与 16 在 $|_s$ 下不可比较，不构成一个 $|_s$ 链.

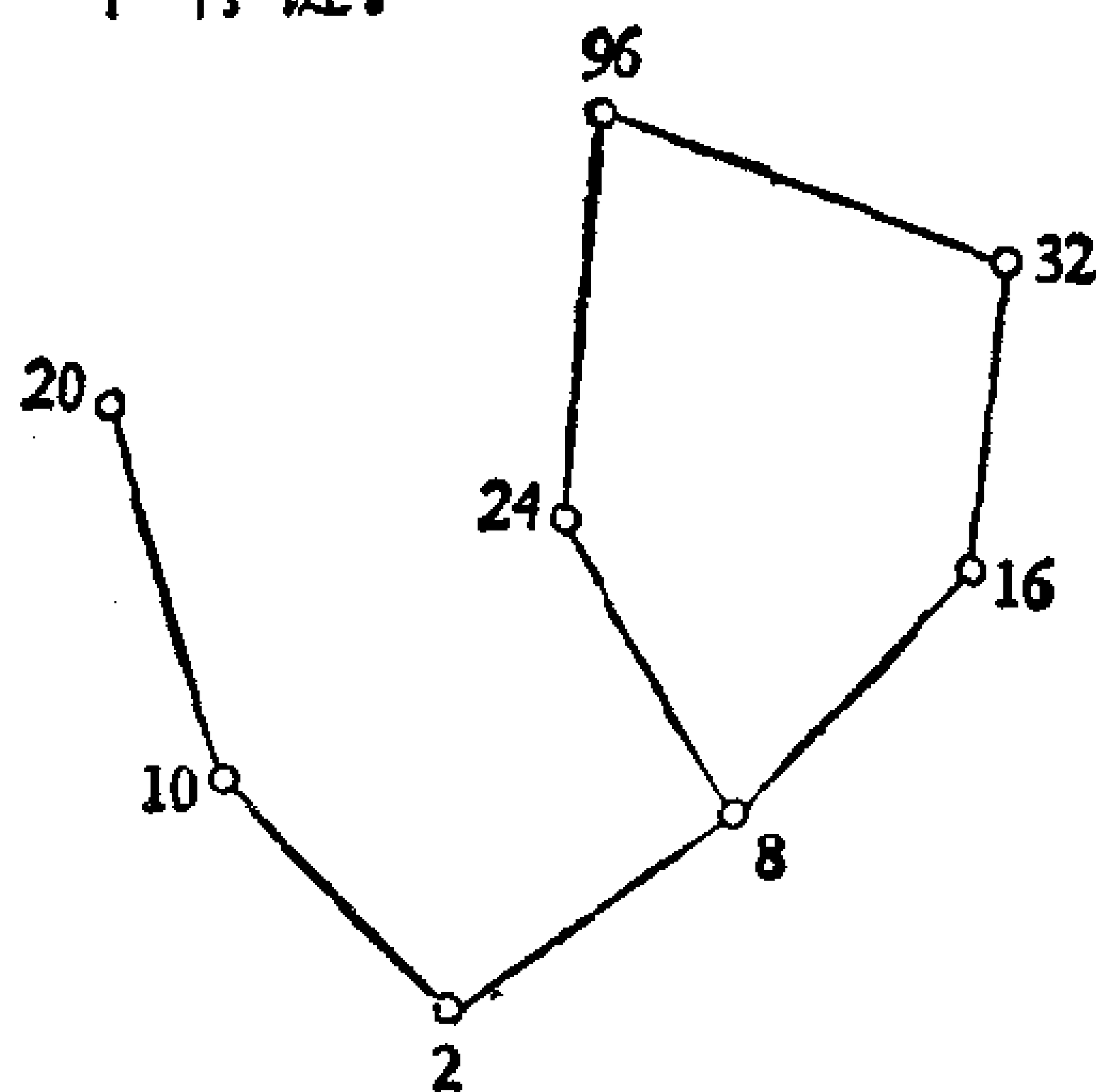


图 16

例 19 偏序结构 $\langle\omega, \in_\omega\rangle$ 是一伪树.

§6 良基关系

回顾对于任意自然数集合 S，考虑偏序结构 $\langle S, \in_s\rangle$. 由自然数的性质，这一偏序结构有一个特点，就是对于任一 $S_1 \subset S$，若 S_1 不空，都有 S_1 的 $\in$-最小元 S_0，即有 $S_0 \in S_1$，且

$$S_0 \cap S_1 = \varnothing.$$

这种性质称偏序结构是良基的.

一般来说，对于任意的集合 S，虽然 $\in_s$ 可能并不形成一偏序关系，但它仍具有这种良基性质. 即它有这样的特点，对于任意的非空的 $S_1 \subset S$，总有 $S_0 \in S_1$，并且 $S_0 \cap S_1 = \varnothing$，即不存在 $x \in S_1$，使得 $x \in S_0$. 或

$$\forall x \in S(x \notin S_0).$$

为了描述上述性质，我们推广极小元的概念.

定义 12.18 令 R 是任意的二元关系，D 为任一不空集合，如果

$$\forall x \in D\overline{R(x, a)}$$

成立，其中 $\overline{R(x, a)} := \neg R(x, a)$，即 $x\bar{R}a$. 则称 D 中元 a 为 R-极小元

定义 12.19 如果一关系 R 对一切非空集合 D，都含有一个 R-极小元，则称 R 为良基的.

如果此定义 12.19 中的 D 不是 $\mathrm{fld}(R)$ 的一个子集合，显然它一定含有一个 R 极小元. 事实上，$D \dot{-} \mathrm{fld}(R)$ 中任一元 a，都是 D 对 R 的一极小元. 因此起作用的是 D 为 $\mathrm{fld}(R)$ 的

子集合.

定理 12.8 一关系 R 为良基的，当且仅当不存在具有定义域为 ω 的函数 f，使得对于每一 $n\in\omega$，都有

$$R(f(n^+), f(n)).$$

也称

$$\cdots, f(n^+), f(n), \cdots, f(1), f(0) \qquad (12.8)$$

为一降链，对于上述 f，令

$$D:=\{f(n)\mid n\in\omega\}. \qquad (12.9)$$

称 D 为 $\mathrm{fld}(R)$ 的一降链子集合.

证明 假定一关系 R 不是良基的，那么存在一非空集合 S，它没有 R 极小元，即

$$\forall x\in S\exists y\in SR(y, x). \qquad (12.10)$$

直观地讲，因为 S 不空，任取 $a_0\in S$，由(12.10)存在 a_1，使得 $R(a_1, a_0)$ 成立，又由于 $a_1\in S$，由 (12.10) 又存在 $a_2\in S$，使得 $R(a_2, a_1)$ 成立. a_2 不同于 a_0，因为 S 中没有 R 的极小元，所以 $S_1=S\dot{-}\{a_0\}$ 中也没有 R 极小元，把 S_1 应用于(12.10)，即得 $a_2\neq a_0$. 把这一过程继续作下去，即得到下述无穷序列

$$a_0, a_1, a_2, \cdots. \qquad (12.11)$$

并且对于每一 $n\in\omega$，都有

$$R(a_{n+1}, a_n), \qquad (12.12)$$

或者记做 $a_{n+1}Ra_n$.

这样我们可以令

$$f:=\{\langle n, a_n\rangle\mid n\in\omega\}, \qquad (12.13)$$

由(12.12)与(12.13)即得欲证结果.

反之，若存在一函数 $f:\omega\to \mathrm{fld}(R)$ 满足定理的条件，我们令：

$$S:=\{y\mid \exists n\in\omega f(n)=y\}. \tag{12.14}$$

不难证明，由(12.14)给出的集合 S 中没有 R 极小元.

注 1 在上述证明中，我们说"把一过程继续进行下去，即得到下述无穷序列"(指获得(12.11))，进行程序可能有无穷多种情况，每一情况下都需要由 a 去找一个 b，使得 bRa 成立，我们知道，虽然 $\exists y\in SR(y,a)$，但是(12.10)并未给出选择 y 的具体方案. 也就是说，可能有许多元甚至无穷多元 y 满足 yRx，根据什么原则去挑选唯一的元 b 并且把这种过程无限地进行下去呢？这就要求使用选择公理. 不过，这里仅须用一种较弱的形式的选择公理，称之为依赖选择原则. 它意味着允许人们依次进行 ω 次的选择.

依赖选择原则 如果 T 是在不空集合 S 上的一个关系，对于每一 $x\in S$，都有 $y\in S$，使得 $T(x,y)$ 成立，则存在一序列：

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \cdots \tag{12.15}$$

满足

$$a_0Ta_1,\ a_1Ta_2,\ a_2Ta_3,\ \cdots,\ a_nTa_{n+1},\cdots. \tag{12.16}$$

若令依赖选择原则中的 $T(x,y)$ 为

$$T(x,y):=R(y,x).$$

其中 R 为定理 12.8 的关系，据依赖选择原则，由(12.10)即可获得(12.11).

现在，使用选择公理来证明选择原则.

由 S 不空，取 $a_0\in S$，由前提，存在 $y\in S$ 使得 a_0Ty 成

立，于是又可选择 $a_1 \in S$，使得 $a_0 T a_1$ 成立。假定在 S 中已获得

$$a_0, a_1, \cdots, a_n \tag{12.17}$$

使得

$$a_0 T a_1, a_1 T a_2, \cdots, a_{n-1} T a_n$$

成立．由前提，存在 $y \in S$，$a_n T y$ 成立．故又可选择 a_{n+1}，使得 $a_n T a_{n+1}$ 成立．依此类推，即由选择公理，继续这一手续，即可获得我们的欲证结果．

定义 12.20 对于任意的偏序结构 $\langle S, R\rangle$，如果 R 是一良基关系，那么我们就称 $\langle S, R\rangle$ 为良偏集合．也称 R 为 S 上良偏序关系．

定义 12.21 令 $\langle S, R\rangle$ 为一线序集合，如果 R 是一良基关系，就称 $\langle S, R\rangle$ 为一良序集合，也称关系 R 良序了集合 S 或 S 被 R 良序．

良偏序集合、良序集合都是很重要的概念，我们还要进一

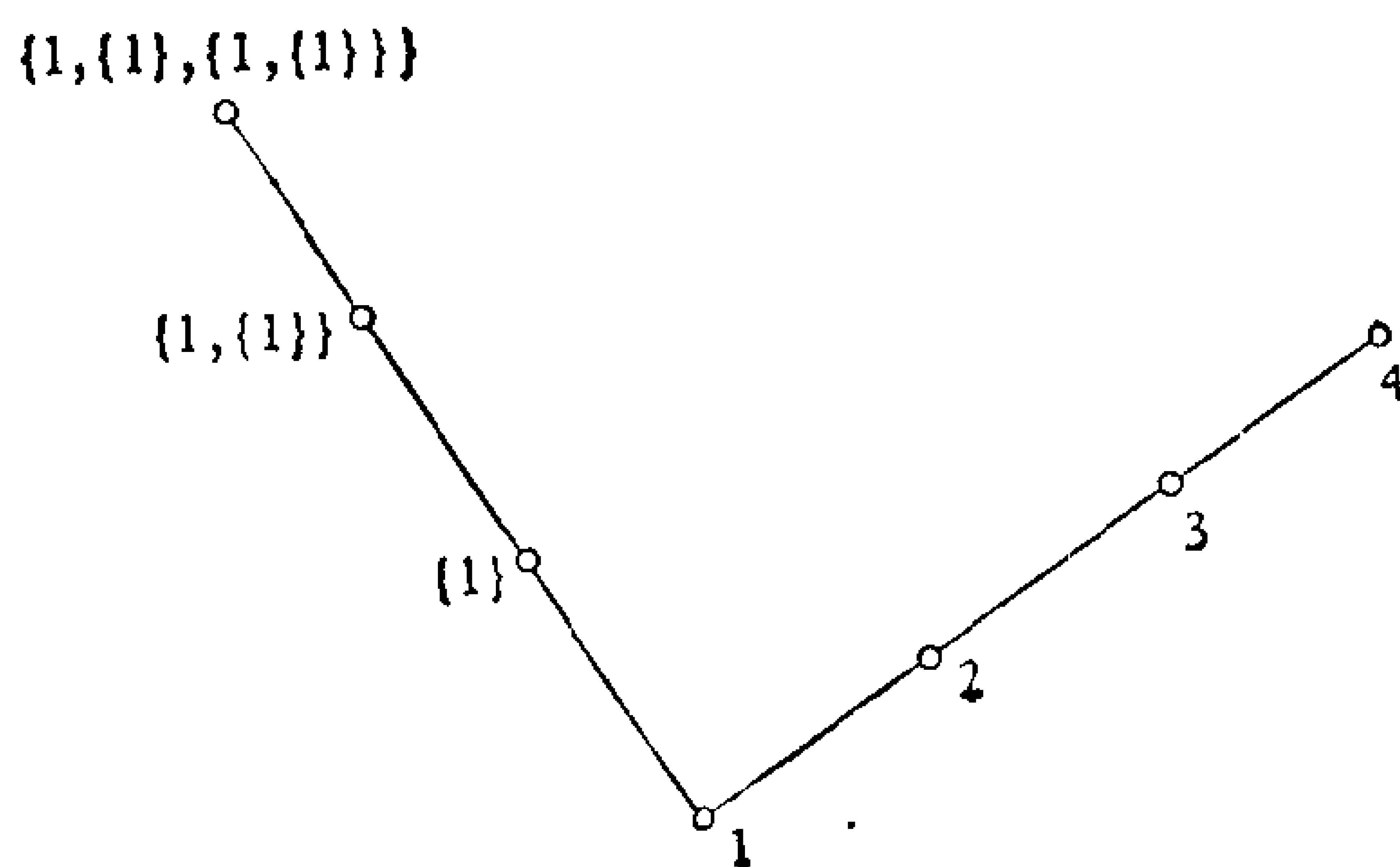


图 17

步讨论它们的性质和应用．

例 20 令

$S=\{1,2,3,4,\{1\},\{1,\{1\}\},\{1,\{1\},\{1,\{1\}\}\}\}$，

那么 $\langle S, \in_s\rangle$ 如图 17 所示是一良偏序集合，但不是一良序集合．

例 21 对于任一自然数 n，$\langle n, \in_n\rangle$ 都是一良序集合．

§7 树

定义 12.22

(1) 一树是一偏序集合，$\langle S, R\rangle$ 使得对于每一 $x\in S$，x 的前节集合 $O_R(x)$ 是被 R 良序的．

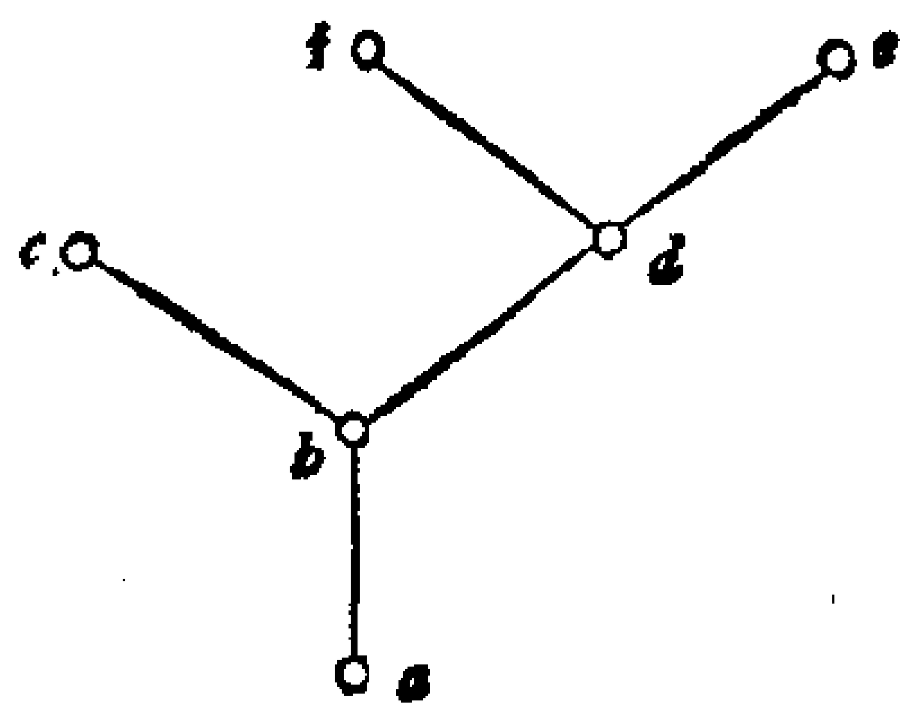


图 18

(2) 对于一偏序集合 $\langle S,R\rangle$ 而言，由 R 线序的 S 的子集合 S_1 叫做一 R 链，一个极大链（即一链 S_1 没有 $x\in S\dot{-}S_1$，使得 $S_1\cup\{x\}$ 还是一链）叫做树的一个枝或分枝，一通路是一链且没有空隙，即一链 S_1 是一通路，如果对于任意 $x,y\in S_1, z\in S$ 并且 xRz, zRy，则 $z\in S_1$．在图 18 中集合 $\{a, b, d, e, f\}$ 不是一链，集合 $\{a, d, e\}$ 是一链但不是一通路，集合 $\{b, d, e\}$ 是一通路，但不是一分枝，集合 $\{a, b, d, e\}$ 是一分枝．

(3) 对于一偏序集合 $\langle S, R\rangle$，我们称 y 是 x 的一直接后继，如果 xRy 且没有 $z\in S$ 使得 xRz，zRx 同时成立．S 的

没有后继的元叫做S的R树叶. 如图 18 中 c, f, e, 都是树叶. 没有前驱元的元叫树根. 图 18 中的 a 即为一树根. 一树中既不是根也不是叶的点叫做节点, 图 18 中 b, d 都是节点.

定理 12.9 如果 $\langle S, R\rangle$ 是一树,那么R对集合S是一良基关系,并且在树 $\langle S, R\rangle$ 中每一链 c 都是一良序集合.

证明 因为S是一集合,我们仅需指出,对于S的每一不空子集合D都有一R极小元. 令 z 是D的一元素. 如果 z 不是S的R极小元, 那么集合 $\{x|x\in D\wedge xRz\}$ 是良序集合 $O_R(z)$ 的一不空子集合. 所以它有一R极小元 y, 这样 y 就应是D的R极小元,因为当 $x\in D$且 xRy, 那么由 xRy 和 yRz, 也有 xRz 和

$$x\in\{x|x\in D\wedge xRz\},$$

这与 y 是R极小元相矛盾.

若 c 是 S 中一链, 那么R是良基于 c 的, 因为 $\langle c, R\rangle$ 是

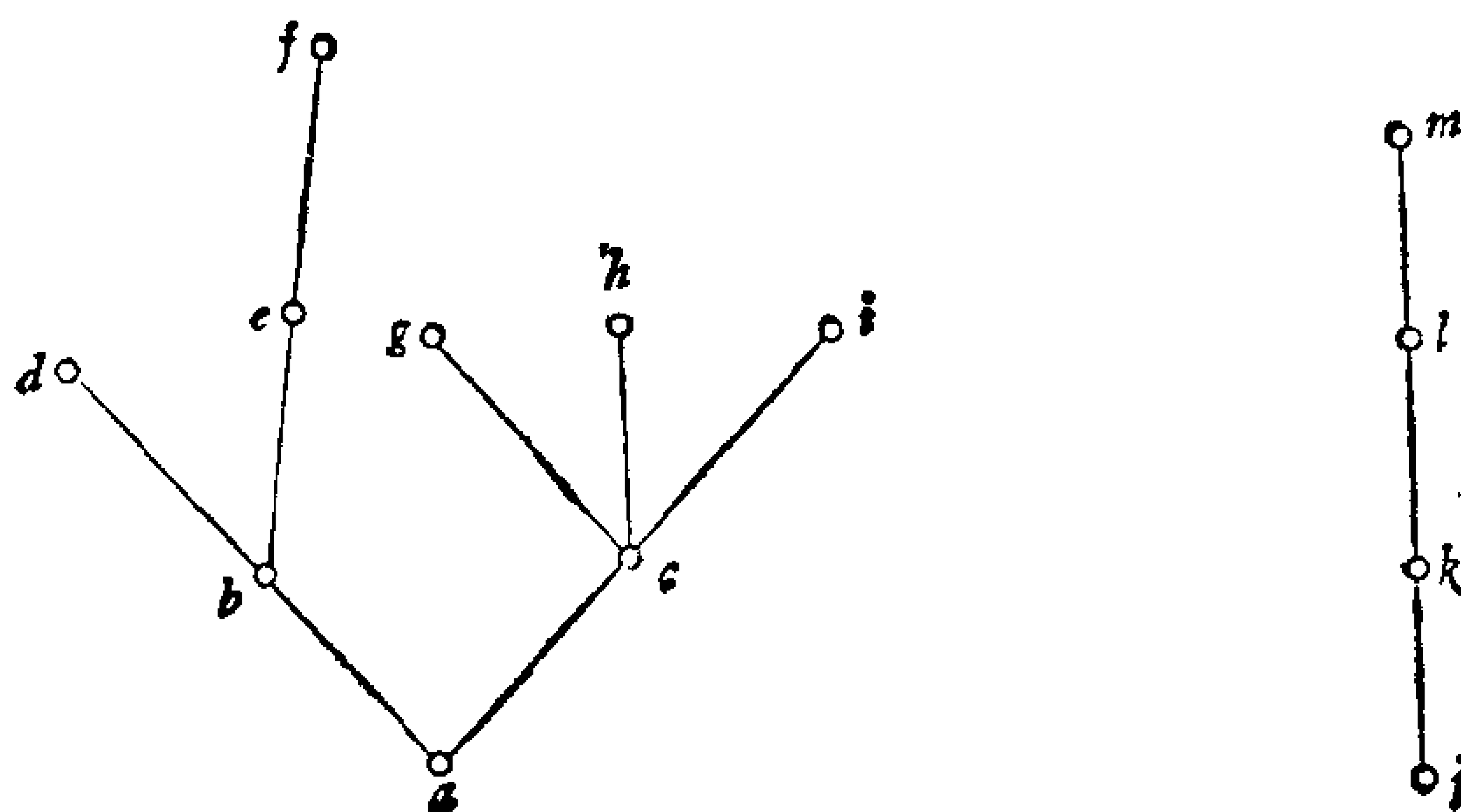


图 19

线序且R良基于c，故c是由R所良序的.

由上述结果，不难验证本章§5例16与例17给出的伪树也都是树. 不是树的伪树我们以后再讨论.

例22 如图19所示，集合$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m\}$构成一树，虽然它可以被看作是两棵独立的树.

习　　题

1. 如图20(a)，它表示下述集合S与S上的关系R.

$S:=\{a, b, c, d\}$,

$R:=\{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle\}\cup I_S$.

试指出图20(b)与图20(c)所表示的集合和关系.

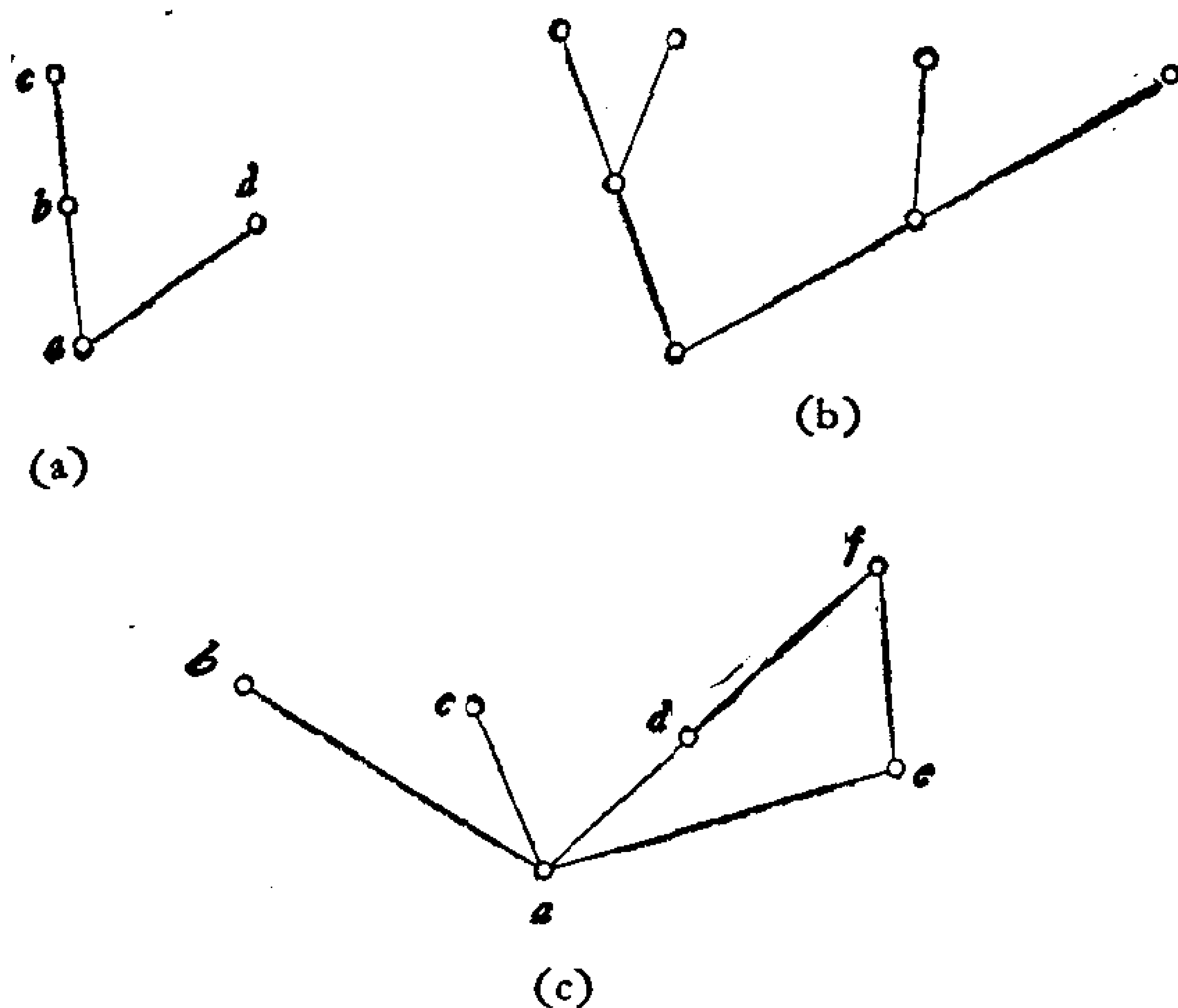


图 20

2. 证明：若关系R是集合S上一偏序，则R^{-1}也是S上的一偏序.

3. 假定$<_{s_1}$与$<_{s_2}$分别是集合S_1与S_2上的偏序，并且已知函数$f:S_1\to S_2$对于S_1中所有的x，y都满足

$$x <_{s_1} y \rightarrow f(x) <_{s_2} f(y).$$

在上述条件下，我们能够断定：

(1) f 是内射函数，

(2) $x <_{s_1} y \leftrightarrow f(x) <_{s_2} f(y)$

成立吗？若成立试证明之，若不成立请举出反例。

4. 试给出图 20(a)—(c) 的表示矩阵.

5. 试画出图 20(a)—(c) 的有向图(用 § 3 中描述的方法).

6. 证明：对于任意的偏序结构 $\langle S, R\rangle$，若 $a \in S$ 是 S 中关于 R 的一最小元，则 a 是 S 中关于 R 的一极小元.

7. 证明：对于任意的偏序结构 $\langle S, R\rangle$，若 $a \in S$ 是 S 中关于 R 的一最大元，则 a 是 S 中关于 R 的一极大元.

8. 证明：对于任意的偏序结构 $\langle S, R\rangle$，若在 S 中存在 R 最小元，则最小元是唯一的.

9. 证明：对于任意的偏序结构 $\langle S, R\rangle$，若 a_1 与 a_2 都是 S 中关于关系 R 的最大元，则有 $a_1 = a_2$

10. 设 $\langle S_1, R_1\rangle$ 和 $\langle S_2, R_2\rangle$ 都是线序结构，现定义 $S_1 \times S_2$ 上关系 R 如下

$$\langle a_1, b_1\rangle R\langle a_2, b_2\rangle \text{ 当且仅当 } a_1R_1a_2 \vee (a_1 = a_2 \wedge b_1R_2b_2)$$

试证明 $\langle S_1 \times S_2, R\rangle$ 是一线序结构.

11. 证明：$\langle \omega, \in_\omega\rangle$ 是一良序集合.

12. 证明：若 $\langle S, R\rangle$ 是一良序结构，并且 $T \subset S$，那么 $\langle T, R\rangle$ 也是一良序结构.

13. 若 $\langle S, R\rangle$ 是一良基关系，且 $R_1 \subset R$，试证明 $\langle S, R_1\rangle$ 是良基关系.

14. 证明：若 R 是良基关系且 $T \subset R$，那么 T 也是良基的.

15. 证明：如果 $\langle S, R\rangle$ 是一良基关系，那么 S 中不存在奇异集合。当然不存在有穷序数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, $1 \leqslant n$，使得

$$x_nRx_1Rx_2R\cdots Rx_{n-1}Rx_n.$$

特别是，R 是不自反的.

第十三章 等价与同构

等价和同构是数学的两个基本概念，也是本书讨论数系扩充和基数各章时的基本工具.

§1 等价类及其相应的关系

在日常生活中，在数学的许多领域中，区分等价类的思想是很普遍的.

例1 姓氏是把人们区分为不同的等价类. 赵、钱、孙、李等等都是一些等价类.同姓可以看作一个关系 R_1, $R_1(x, y)$ 意指 x 和 y 是同姓的.

当然，不同的民族也把人们区分为不同的等价类；而不同性别又把人们区分为男性与女性两大类别. 这些不同的分类方法都是由相应的等价关系来划分的.

例2 把自然数集合可区分为：偶数和奇数两大类. 这种对 ω 中元的分类法也可以由下述关系 R_2 所确定.

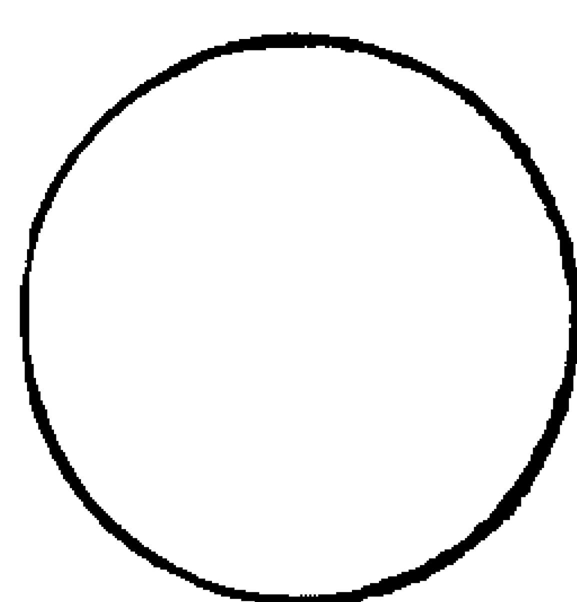
$$R_2(x, y) := \{\langle x, y\rangle \mid |x-y| \text{ 可被 2 整除}\}$$
$$= \{\langle x, y\rangle \mid x \in \omega \wedge y \in \omega \wedge \exists z \in \omega(2 \cdot z = |x-y|)\}$$

例3 把 ω 划分为如下十个部分：

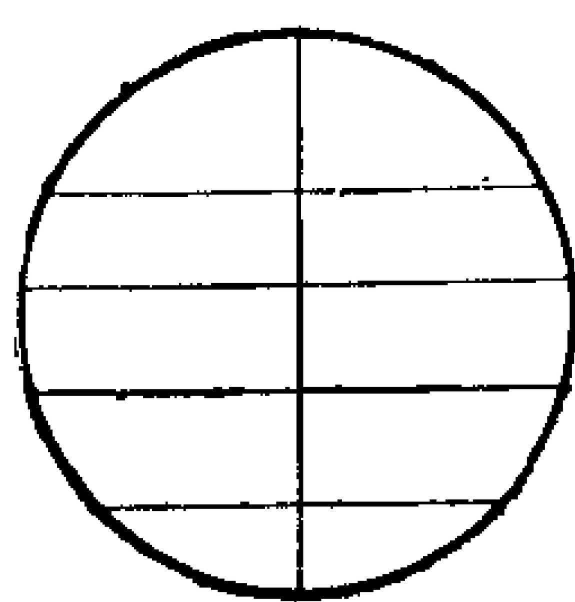
$$S_0 := \{0, 10, 20, 30, \cdots\},$$
$$S_1 := \{1, 11, 21, 31, \cdots\},$$
$$S_2 := \{2, 12, 22, 32, \cdots\},$$
$$\cdots$$
$$S_9 := \{9, 19, 29, 39, \cdots\}.$$

不难看出，对于上述每一集合，S_i 中的元素，它们被 10 除所得的余数相同，这样按余数相同划分成了如上 10 个集合.

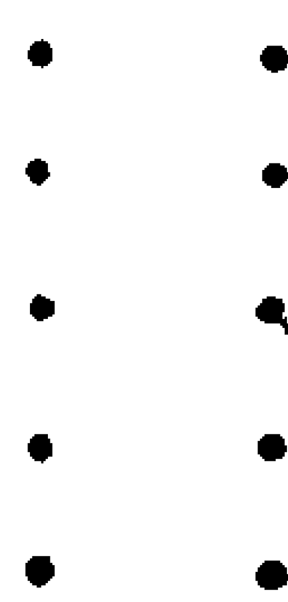
“分类”或称“划分”直观地可以设想为把集合中元素分别放到一些小盒子里. S 的每一元素恰好分在某一个小盒子而且只分在一个盒子里，这些小盒子的集合（或汇合）形成了对 S 的一个划分.



(a)



(b)



(c)

图 1 把一集合区划为小盒子示意图

把图 1(a) 转换为 (c) 的过程，这种抽象方法是数学中常用的方法.

假定把 S 上的二元关系 R 定义为：对于 S 中的 x 与 y.

$R(x, y)$ 当且仅当 x 与 y 在同一个小盒子中，

那么，我们容易看出，R 有下述三条性质.

(1) R 对于 S 是自反的,即

$$\forall x R(x, x).$$

(2) R 是传递的,即

$$\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \land R(y, z) \to R(x, z)).$$

(3) R 是对称的,即

$$\forall x \forall y (R(x, y) \to R(y, x)).$$

定义 13.1 如果二元关系 R 在 S 上是自反的、对称的和传递的,则称 R 是 S 上的一个等价关系.

引理 13.1 如果 R 是 S 上一个对称的和传递的关系,则 R 一定是 $\mathrm{fld}(R)$ 上的一个等价关系.

证明 我们知道任何的关系 R,都有

$$R \subset \mathrm{dom}(R) \times \mathrm{ran}(R) \subset \mathrm{fld}(R) \times \mathrm{fld}(R).$$

因此,我们仅须证明 R 在 $\mathrm{fld}(R)$ 是自反的,我们有:

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{dom}(R) &\to R(x, y), & \text{对于某一 } y \\ &\to R(x, y) \land R(y, x) & \text{由对称性} \\ &\to R(x, x). & \text{由传递性.} \end{aligned}$$

类似地,对于 $\mathrm{ran}(R)$ 中元素,也可有相应的推演过程.即 R 在 $\mathrm{fld}(R)$ 上是自反的.

注 1 并不能从上述引理推出:"如果一关系 R 在 S 上是对称的和传递的,则 R 为 S 上一个等价关系".因为上述引理推得 R 在 $\mathrm{fld}(R)$ 上是自反的,但可能在 S 上不是自反的,因为可能有:

$$\mathrm{fld}(R) \subset_{+} S.$$

这样,就可能存在一 $x \in S$,但在 S 中不存在 y,使得

$R(x, y)$ 或者 $R(y, x)$.

S 的任一分划,确定了 S 上的一个等价关系 R. 反过来, S 上任意的一个等价关系 R 也能确定 S 的一个分划(分类).

定义 13.2 对于任一关系 R, 我们令:

$$O_R(x) := \{t \mid tRx\}, \tag{13.1}$$

并且当 R 为一等价关系且 $x \in \mathrm{fld}(R)$ 时, 就称 $O_R(x)$ 为模 R 中 x 的那一等价类. 行文中 R 为不变时,可简写做 $O(x)$.

引理 13.2 若 R 为集合 S 上一等价关系, 且 $x \in S$, 则 $O_R(x)$ 为一集合.

证明 由(13.1)我们有 $O_R(x) \subset \mathrm{dom}(R)$, 故

$$O_R(x) = \{t \mid tRx \wedge t \in \mathrm{dom}(R)\}. \tag{13.2}$$

由分离公理,即得欲证结果.

引理 13.3 若 R 为集合 S 上的一等价关系, 则: R 造成的分类即等价类的汇合:

$$C_R := \{y \mid \exists x(y = O_R(x) \wedge x \in S)\}, \tag{13.3}$$

也是一集合.

证明 由(13.1),我们可知, 对于任意 $x \in S$, 我们都有:

$$O_R(x) \subset \mathrm{dom}(R),$$

$$O_R(x) \in P(\mathrm{dom}(R)).$$

所以,就有

$$C_R = \{y \mid \exists x(y = O_R(x) \wedge x \in S \wedge y \in P(\mathrm{dom} R))\}.$$

由分离集合公理,即得欲证结果.

引理 13.4 假定 R 为 S 上的一等价关系,又假定 $x, y \in S$, 那么

$$O_R(x) = O_R(y) \leftrightarrow xRy. \qquad (13.4)$$

证明 假定 $O_R(x) = O_R(y)$. 由 yRy，故有

$$y \in O_R(y) = O_R(x),$$

从而 $y \in O_R(x)$，从定义 13.2，即得 xRy. 综上，我们有

$$O_R(x) = O_R(y) \rightarrow xRy.$$

设 xRy，那么对于任意 $t \in S$，有：

$$\begin{aligned} t \in O_R(y) &\rightarrow tRy \\ &\rightarrow yRt && \text{对称性} \\ &\rightarrow xRt && \text{由 } xRy \text{ 及传递性} \\ &\rightarrow tRx && \text{对称性} \\ &\rightarrow t \in O_R(x). \end{aligned}$$

因此，就有 $O_R(y) \subset O_R(x)$. 类似地，由 xRy 可得 yRx，并且可得 $O_R(x) \subset O_R(y)$. 故 $O_R(x) = O_R(y)$. 综上，我们有 $xRy \rightarrow O_R(x) = O_R(y)$. 由上述两步，(13.4) 成立，欲证结果得证.

§2 划　分

现在，我们给出划分的一个数学定义.

定义 13.3 集合 S 的划分是 S 的非空子集合的集合 B，它是两两不交的和穷竭的. 就是说，如果 B 满足条件

$$\exists x(x \in B \wedge \forall y \in B(y \subset S); \qquad (13.5)$$

$$\forall x \in B \forall y \in B((x \cap y) = \varnothing \vee x = y); \qquad (13.6)$$

$$\forall x \in S \exists y \in B(x \in y). \qquad (13.7)$$

则称 B 是集合 S 的一个划分.

定理 13.1 假定 R 为非空的集合 S 上的一等价关系. 那么,所有等价类的集合 C_R 是一个划分.

证明 假定 R 为一等价关系,S 非空,我们来证明 C_R 满足(13.5)—(13.7).

首先,我们有 x, 使得 $x \in S$, 并且有

(1) $O_R(x) \in C_R$.

(2) $O_R(x)$ 不空,因为 $R(x, x)$, 即 $x \in O_R(x)$.

(3) 对于任意 $x, y \in S$, 我们假定有 t 使得:

$$t \in O_R(x) \cap O_R(y).$$

所以有

$$R(t, x) \wedge R(t, y).$$

因此, $R(x, t) \wedge R(t, y)$.

所以,有 $R(x, y)$, 即 $O_R(x) = O_R(y)$.

上节已经指出,一个集合 S 的分类是怎样导致一个等价关系的. 现在,我们从一集合 S 的划分 B 出发,形式地给出一个关系 R_B, 不难证明 R_B 是 S 上的一个等价关系.

定义 13.4 假定 B 是集合 S 的一个划分,我们称下述关系 R_B 是划分 B 的相应关系:

$$R_B(x, y) \longleftrightarrow \exists u \in B(x \in u \wedge y \in u). \qquad (13.8)$$

定理 13.2 如果 B 是 S 的一个划分,那么定义 13.4 中给出的 R_B 是 S 上一等价关系.

证明 由定义 13.4,不难验证 R_B 是自反的. 对称的和传递的.

§ 3 商集合与采样集合

定义 13.5 如果 R 为 S 上的一个等价关系，那么我们称集合 C_R 为一商集合，它的元素是等价类，并且常常记做 S/R. 读做"S 模 R". 这时，有一个自然映射:

$$\varphi: S \to S/R. \tag{13.9}$$

它被定义为，对于任意 $x \in S$ 都有

$$\varphi(x) = O_R(x). \tag{13.10}$$

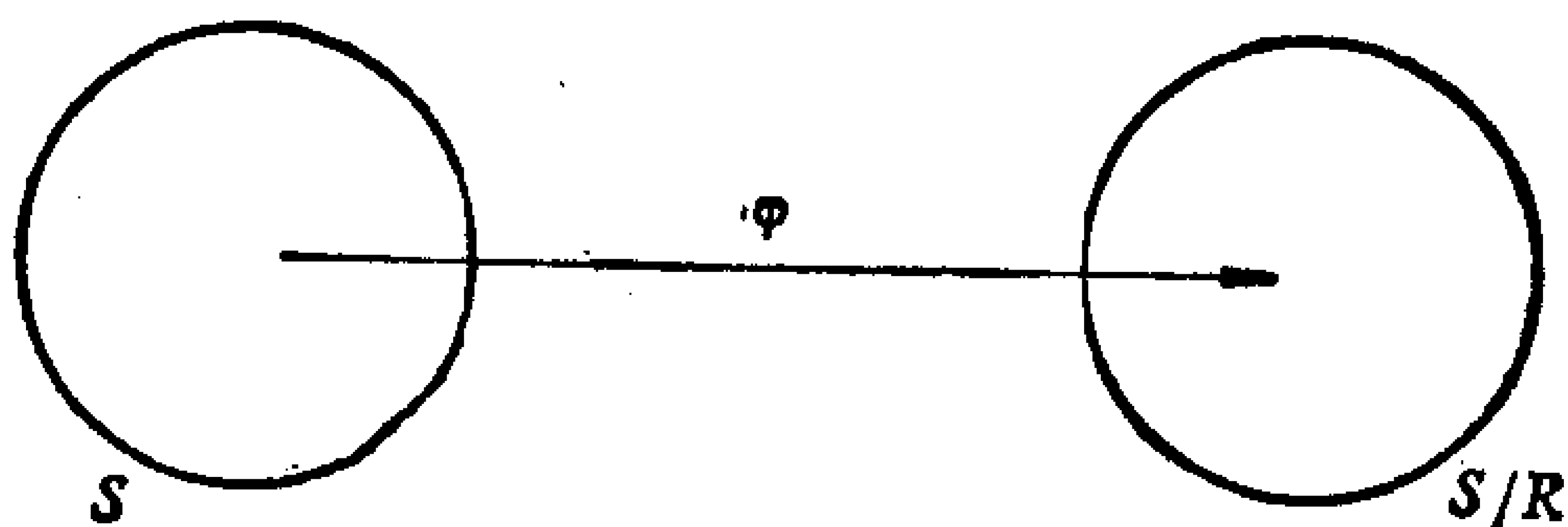


图 2 自然映射 φ

例 4 令 R 为 ω 上满足下式的二元关系:

$$R(m, n) \leftrightarrow m - n \text{ 可被 } 10 \text{ 整除}$$
$$\leftrightarrow \exists z \in \omega(1 < z \wedge 10 \cdot z = |m - n|).$$

那么，不难验证 R 为 ω 上一个等价关系，这个商集合有 10 个元:

$$O_R(0), O_R(1), O_R(2), \cdots, O_R(9).$$

它们分别对应于被 10 除之后的十种可能的余数. 很显然，这十个元恰好是我们在 § 1 的例 3 中所给出的集合

$$S_0, S_1, S_2, \cdots, S_9.$$

我们已经注意到商集合的三个有趣的特点：它本身是不空的，它的任意元也是不空的，并且是两两不交的．对于有这种性质的集合，我们能否在它的每一个集合中恰好挑选一个元素使其组成新的集合呢？如果能挑选出来，我们称这一集合为商集合的采样集合．对于某些特殊情况，比如在例 4 中，能否从 $S_0, S_1, \cdots, S_9$ 中分别选择一个元素而组成新的集合呢？当然可以，我们可以有集合 $\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$，但是，是否在任何情况下都能这样做呢？这又涉及到一个根本原则，即选择公理的一种形式，让我们来陈述这一形式如下：

选择公理（形式 III）

$$\forall x \forall y \in x(y \neq \varnothing \wedge \forall y_1 \in x \forall y_2 \in x(y_1 \neq y_2 \to y_1 \cap y_2 = \varnothing) \to \exists C(\forall z \in x \exists ! t \in z(t \in C) \wedge \forall t \in C \exists ! z \in x(t \in z))). \quad (13.11)$$

上述公式的直观含意是很清楚的，就是对于任一由不空的两两不交的集合组成的集合 x，总可以从它的不空的两两不交的集合中同时各取一个元素组成一新的集合 C．我们称集合 C 为采样集合．

定理 13.3 若选择公理的形式 II 成立，则选择公理的形式 III 也成立．

证明 选择公理的形式 II 是说，设 H 是具有定义域为 I 的一函数，且 $\forall i \in I(H(i) \neq \varnothing)$，则 $\prod_{i \in I} H(i)$ 不空，也就是说，有一函数 $f \in \prod_{i \in I} H(i)$，这里有

$$\forall i \in I f(i) \in H(i). \quad (13.12)$$

现在，我们使用形式 III 的前提，构造这一函数 f，取 I 为

满足形式 III 的前提的集合，即 I 是由不空的两两不交的集合所组成的集合，令 $H(i)=i$（当 $i\in I$）时，由假定，有

$$\forall i\in I(H(i)\neq\varnothing),$$

所以，使用形式 II，就有一函数 f 满足(13.12)，令

$$C:=\mathrm{ran}(f). \tag{13.13}$$

这样，由(13.12)、(13.13)和 f 是一个函数并满足这种性质，我们就有：

$$\forall z\in I\exists!t\in z(t\in C)\wedge\forall t\in C\exists!z\in I(t\in z),$$

即，我们获得了欲证结果.

§4 等价关系与函数 f 的相容性

现在令 R 为 S 上一等价关系，并且令函数 $f:S\to T$，它们满足：

$$R(x,y)\longleftrightarrow f(x)=f(y). \tag{13.14}$$

也就是说，可以一方面通过关系 R，把集合 S 分成若干等价类，另一方面，通过函数 f 把 S 映射到集合 T，这个 f 有这种性质：同一等价类中的各点都映射到 T 中一个点，反之，对于 $\mathrm{ran}(f)\subset T$ 中任一点 t，$f^{-1}(t)$ 恰好是 S 中在 R 之下某一个等价类(图 3)．这样，就应当有一函数 $\hat{f}$.

$$\hat{f}:S/R\to T. \tag{13.15}$$

但是，是否有 $\hat{f}$ 使得

$$f=\hat{f}\circ\varphi \tag{13.16}$$

成立呢？其中 φ 为自然映射(见图 4)，也就是说，$\hat{f}$ 在等价类

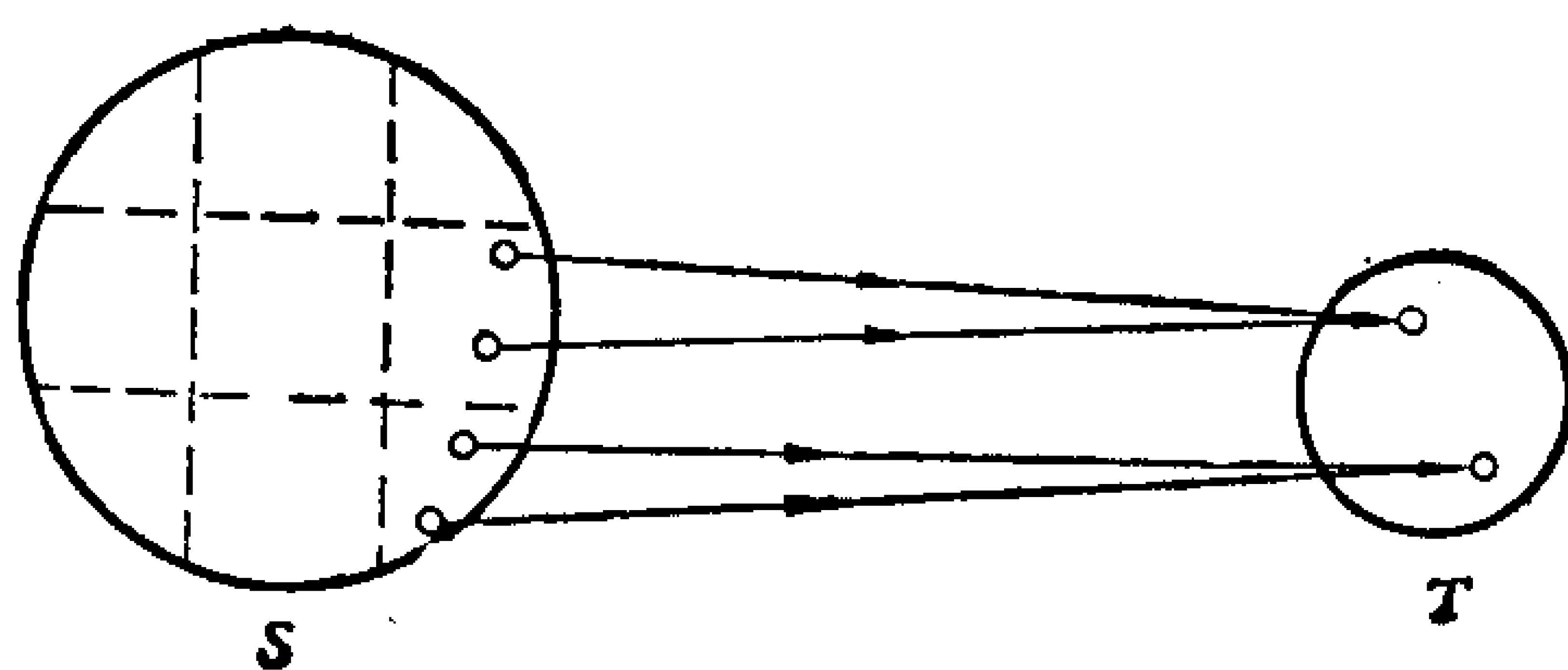


图 3　等价关系 R 的相关函数 f

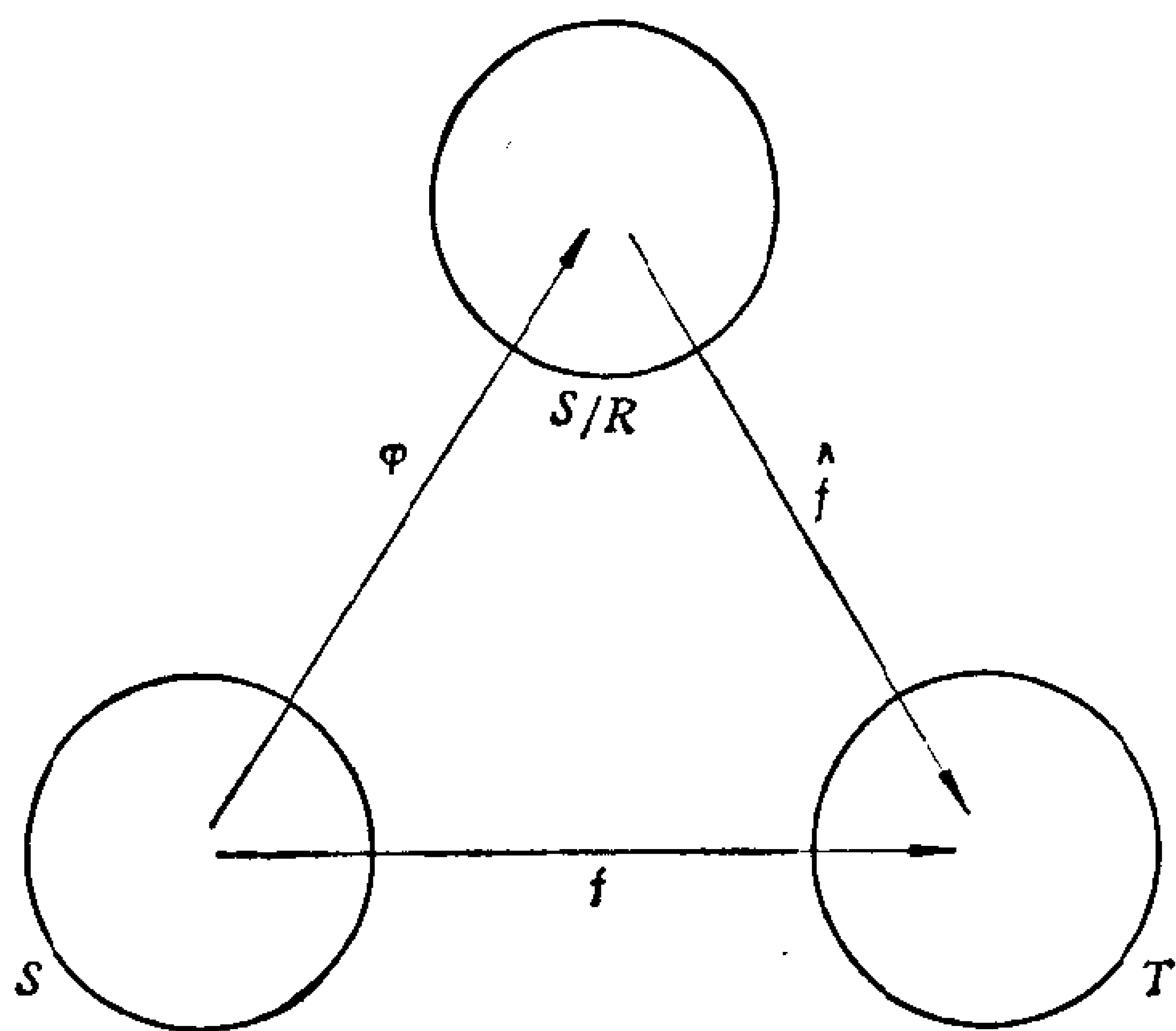


图 4　把 f 分解成服从一一对应的自然映射

$O_R(x)$ 的值是否等于 f 在 x 的值呢？现在我们就来考察定义在商集合上的函数问题，令 T 为 S，即 $f:S\to S$，这时，我们要问是否存在一个相应的函数 $\hat{f}$.

$$\hat{f}:S/R\to S/R.$$

使得对于每一 $x\in S$，都有

$$\hat{f}(O_R(x))=O_R(f(x))$$

成立呢？　我们试图运用从等价类中选取一个特定的元素 x，

并构成 $O_R(f(x))$ 的途径去定义函数 $\hat{f}$ 在等价类上的值（见图5）。但是，假定 x_1 与 x_2 都在同一个等价类中，只有当 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 也都属于同一等价类之中，$\hat{f}$ 才能被定义的。

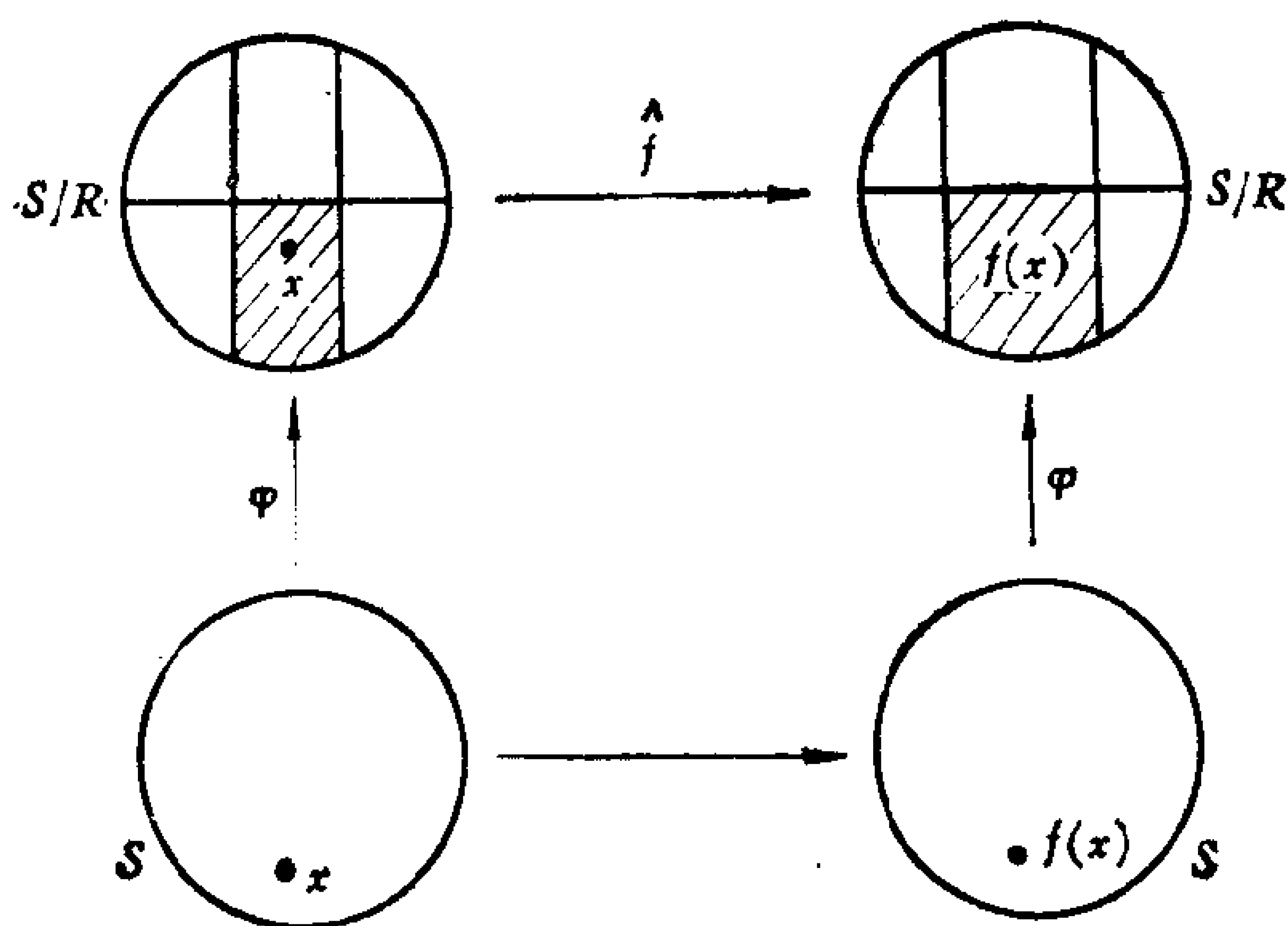


图 5　当 $\hat{f}\circ\varphi=\varphi\circ f$ 时，称 f 与 $\hat{f}$ 是交换的

为了进一步说明这一观念，我们考虑把集合 ω 划分为六个等价类，使得

$$R(m,n)\longleftrightarrow |m-n| \text{ 能被 6 整除.} \qquad (13.17)$$

现在考虑三个函数：

$$fi:\omega\rightarrow\omega \quad (i=1,2,3),$$

并且对于任一 $n\in\omega$，它们分别取值为：

$$f_1(n)=2n,\quad f_2(n)=n^2,\quad f_3(n)=2^n.$$

我们问，在每一种情况下，是否有：

$$f_i:\omega/R\rightarrow\omega/R,\quad (i=1,2,3)$$

使得对于任一 $n\in\omega$，都有

$$\hat{f}_1(O_R(n))=O_R(2n),$$

$$\hat{f}_2(O_R(n)) = O_R(n^2),$$
$$\hat{f}_3(O_R(n)) = O_R(2^n)$$
成立呢？对 f_1 而言，对任意的 $n, m \in \omega$，若 $R(n, m)$ 成立，显然有 $R(2n, 2m)$ 成立，则 $\hat{f}_1$ 就可被定义了．对 f_1 而言，亦即，存在一函数 $\hat{f}_1$ 满足等式 $\hat{f}_1(O(n)) = O(2n)$．也就是说，无论类 $O(n)$ 中的那一个元素 m，总能得到相同的等价类 $O(2m)$．类似地，如果 $R(n, m)$ 成立，那么由
$$m^2 - n^2 = (m + n) \cdot (m - n),$$
有 $R(m^2, n^2)$，$\hat{f}_2$ 也被定义了．$\hat{f}_3$ 是不能被定义的，即满足条件 (13.17) 的 f_3 不能被定义．因为 $R(0, 6)$ 成立，$2^0 = 1$，$2^6 = 64$ 且 $\overline{R(1, 64)}$ 成立，即，虽然 $O(0) = O(6)$，但没有 $O(1) = O(64)$，所以不能有任何函数 $\hat{f}_3$，使得条件 (13.17) 成立．

定义 13.6 令 R 为 S 上的等价关系，令函数
$$f: S \to S,$$
如果对任意的 $x, y \in S$，都有
$$R(x, y) \to R(f(x), f(y)).$$
则称关系 R 与函数 f 是相容的．

定理 13.4 设 R 为 S 上的一等价关系，又设函数
$$f: S \to S,$$
如果 R 与 f 是相容的，那么存在唯一的函数 $\hat{f}: S/R \to S/R$，使得：
$$\hat{f}(O_R(x)) = O_R(f(x)) \qquad (13.18)$$
成立．如果 R 与 f 不相容，那么就不存在这样的函数 $\hat{f}$．类似

的结论适用于二元函数.

$$f: S \times S \to S.$$

证明 假定R与f是相容的. 因为(13.18)要求有序对$\langle O_R(x), O_R(f(x))\rangle \in \hat{f}$, 因此,我们将试图给出下述定义:

$$\hat{f} := \{\langle O(x), O(f(x))\rangle \mid x \in S\}.$$

现在来验证此关系$\hat{f}$是一函数, 为此我们考察其中任意的两个有序对: $\langle O(x), O(f(x))\rangle$和$\langle O(y), O(f(y))\rangle$.

我们有: $O(x) = O(y) \to R(x, y)$ 由引理 13.4

$\to R(f(x), f(y))$ 由相容性

$\to O(f(x)) = O(f(y))$. 由引理13.4

这就说明$\hat{f}$是一函数. 另一方面, 由$\hat{f}$的定义, 显然$\mathrm{dom}(\hat{f}) = S/R$, 而且$\hat{f} \subset S/R \times S/R$, 所以有:

$$\hat{f}: S/R \to S/R.$$

而且,由于$\langle O(x), O(f(x))\rangle \in \hat{f}$, 所以(13.18)成立.

现在,假定R与f不相容, 我们将证明不可能存在函数$\hat{f}$满足(13.18), 因为不相容就意味着在S中有某些x, y, 使得$R(x, y)$成立,即$O(x) = O(y)$, 但是没有

$$O(f(x)) \neq O(f(y)).$$

然而,为了使得(13.18)成立,我们需要有

$$\hat{f}(O(x)) = O(f(x)) \quad 和 \quad \hat{f}(O(y)) = O(f(y)).$$

而这是不可能的,因为二等式的左边相等,而右边不相等.

综上,我们完成了定理 13.4 的证明.

§5 同　　构

定义 13.7 两个有序集合 $\langle S_1, R_1\rangle$ 和 $\langle S_2, R_2\rangle$ 之间的同构，是指具有定义域为 S_1 和值域为 S_2 的一个一一对应的函数 f，使得对于任意的 $x, y \in S_1$，都有：

$$R_1(x, y) \longleftrightarrow R_2(f(x), f(y)) \tag{13.19}$$

成立．这里有序集合是指线序集合或偏序集合．

例 1 如令

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$S_2 = \{11, 12, 13, 14, 15\}.$$

可以验证 $\langle S_1, \in\rangle$ 和 $\langle S_2, \in\rangle$ 是同构的，因为当我们取 f 为从 S_1 到 S_2 的函数，并且当 $x \in S_1$ 时有

$$f(x) = x + 10.$$

这时，当 $x, y \in S_1$ 时，显然有

$$x \in y \longleftrightarrow f(x) \in f(y).$$

成立．并且这时我们可以称 S_1 与 S_2 是 $\in$ 同构的．

例 2 我们令

$$S_1 = \{x | x \text{ 是一偶数}\},$$

$$S_2 = \{x | x \text{ 是一奇数}\}.$$

可以验证 $\langle S_1, \in\rangle$ 与 $\langle S_2, \in\rangle$ 是 $\in$ 同构的．因为当取 f 为从 S_1 到 S_2 的函数，并且当 $x \in S_1$ 时，有

$$f(x) = x + 1.$$

这时，当 $x, y \in S_1$ 时，显然有

$$x \in y \longleftrightarrow f(x) \in f(y)$$

成立.

例3 令 $\omega \times \omega$ 上一关系 R 如下，当 $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \omega$ 时，有

$$\langle x_1, y_1\rangle R\langle x_2, y_2\rangle \longleftrightarrow (\mathrm{Max}\{x_1, y_1\} < \mathrm{Max}\{x_2, y_2\})$$

$$(\mathrm{Max}\{x_1, y_1\} = \mathrm{Max}\{x_2, y_2\} \wedge (y_1 < y_2 \vee y_1 = y_2 \wedge x_1 < x_2)),$$

我们能够验证 $\langle \omega \times \omega, R\rangle$ 与 $\langle \omega, \in\rangle$ 是同构的，因为当令

$$g(x, y) = \sum_{k < \mathrm{Max}\{x, y\}} 2k + 1,$$

$$f(x, y) = \begin{cases} g(x, y) + y & \text{当 } x < y \text{ 时} \\ g(x, y) + x + y. & \text{当 } y \leqslant x \text{ 时.} \end{cases}$$

其中 $\mathrm{Max}\{x, y\}$ 为 x 与 y 的较大者，$\sum$ 表示通常的求和符号. 这时不难验证函数 $f: \omega \times \omega \to \omega$，使得上述 $\langle \omega \times \omega, R\rangle$ 与 $\langle \omega, \in\rangle$ 同构.

上述例 1—3，都是强线序之间的同构，其实同构概念是一更为广泛的概念. 例如，令

$$S = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}\},$$

这时 $\langle P(S), \subset\rangle$ 与 $\langle P(3), \subset\rangle$ 是同构的，并且 $\langle P(S), \subset_+\rangle$ 与 $\langle P(3), \subset_+\rangle$ 也是同构的.

引理 13.5 令 $\langle S_1, R_1\rangle$ 和 $\langle S_2, R_2\rangle$ 是强线序集合，f 是 S_1 与 S_2 之间一双射函数，使得对于任意的 $x, y \in S_1$ 都有

$$P_1(x, y) \to R_2(f(x), f(y)).$$

那么，f 是 $\langle S_1, R_1\rangle$ 与 $\langle S_2, R_2\rangle$ 之间的一同构.

证明 我们仅须证明：如果对于任意的 $x, y \in S$，使得

$R_2(f(x), f(y))$ 成立，则有 $R_1(x, y)$ 成立. 否则，由于 R_1 是 S_1 上的线序关系，就必然有 $x = y$ 或 $R(y, x)$ 成立. 又由于 f 是双射函数，所以，当 $x = y$ 时，有 $f(x) = f(y)$；当 $R_1(y, x)$ 成立时，有 $R_2(f(y), f(x))$ 成立. 从而得出矛盾. 所以就获得欲证结果.

在第十二章中，曾谈到结构的概念，现在把结构的概念推广如下.

定义 13.8 我们称有序对 $\langle U, \mathfrak{R}\rangle$ 为一结构，如果 U 是一集合，$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$，而 $\mathfrak{R}_1$ 为 U 上的关系的集合，$\mathfrak{R}_2$ 为 U 上的函数的集合. 通常 $\mathfrak{R}$ 是有穷集合（即存在一自然 n，和 $\mathfrak{R}$ 与 n 之间的一双射）. 特别地，$\mathfrak{R}$ 可以仅由一个关系或一个函数所组成，并且称 U 为此结构的域，$\mathfrak{R}_1$ 中元称为此结构的基本关系，$\mathfrak{R}_2$ 中元称为此结构的基本函数.

例 4 令 S 为一集合，R_1，R_2 为 S 上二关系，f, g 分别为 S 上的一元函数和二元函数，并且令 $\mathfrak{R} := \{R_1, R_2, f, g\}$，那么，这时有序对 $\langle S, \mathfrak{R}\rangle$ 就是一结构，为了醒目，有时也把此结构写作 $\langle S, R_1, R_2, f, g\rangle$.

例 5 我们令 “$<$” 表示自然数集合 ω 上的自然次序，“$+_\omega$” 表示 ω 上的加法运算，$\cdot_\omega$ 表示 ω 上的乘法运算，$\langle \omega, <\rangle$ 表示自然数集合的序结构，$\langle \omega, +_\omega\rangle$ 表示加法算术，用 $\langle \omega, +_\omega, \cdot_\omega\rangle$ 表示皮阿诺算术结构，当我们还要强调域上的次序关系时，也可以写作 $\langle \omega, <, +_\omega\rangle$ 或 $\langle \omega, <, +_\omega, \cdot_\omega\rangle$.

例 6 每一个有序集合 $\langle S, R\rangle$ 都是一结构（具有一个二元关系）.

例 7 $\langle P(S), \subset_s, \cup_s, \cap_s\rangle$ 是一结构（具有一个二元关系 $\subset_s$ 和二个二元函数 $\cup_s, \cap_s$）.

定义 13.9 两个结构 $\langle U, \mathfrak{R}\rangle$ 与 $\langle U', \mathfrak{R}'\rangle$ 之间的同构是指具有以 U 为定义域，以 U' 为值域的一个一一对应的函数 f，使得当 U 中元素 x, y 对于在 $\mathfrak{R}$ 中元素 R 成立时，即 xRy 成立，当且仅当 x 与 y 在 U' 中的对应元素 $f(x)$，$f(y)$ 对于 $\mathfrak{R}'$ 中对应元素 R' 也成立，即 $f(x)R'f(y)$ 成立，（见图 6）；并且对于 $\mathfrak{R}$ 中任一函数 h 和任意元 $x\in U$，$y\in U$，若 $h(x)=y$，则对于 $\mathfrak{R}'$ 中的相应函数 h' 和相应元 $f(x)$，$f(y)$ 也有

$$h'(f(x))=f(y),$$

反之亦然（见图 7）． 对于多元函数也保持上述对应的结果，也可概括地说 U 与 U' 之间的双射函数 f 保持结构的关系与函数的性质．

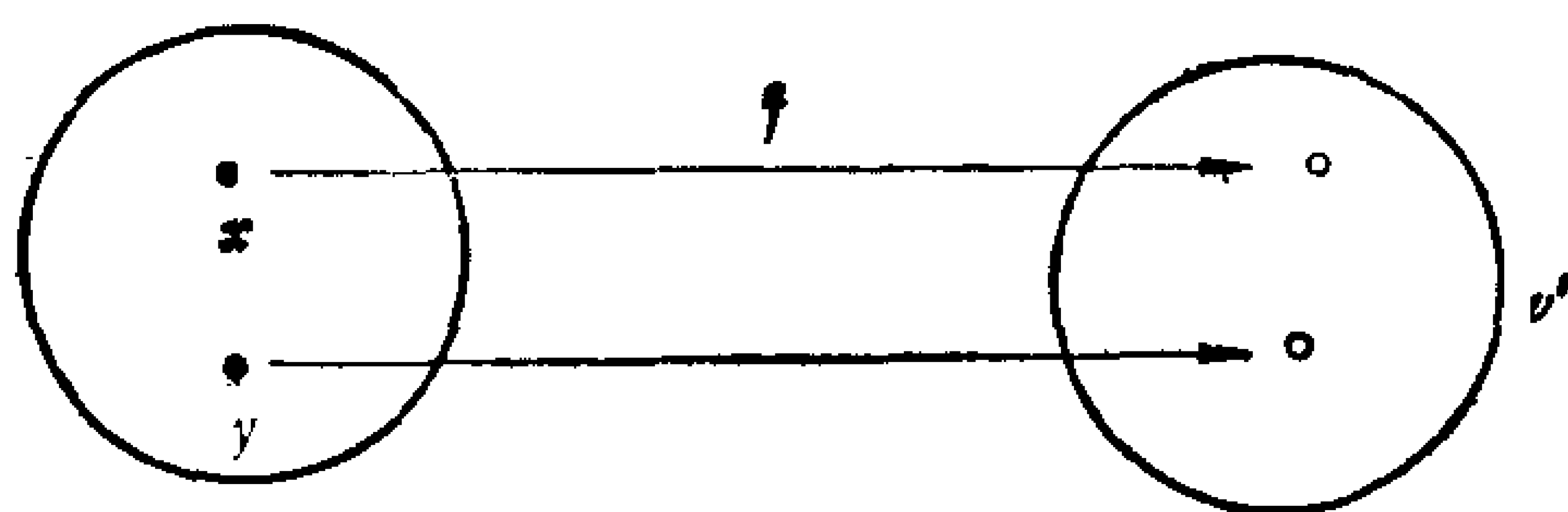


图 6 相应元对相应关系 xRy 与 $f(x)R'f(y)$ 同时成立或不成立

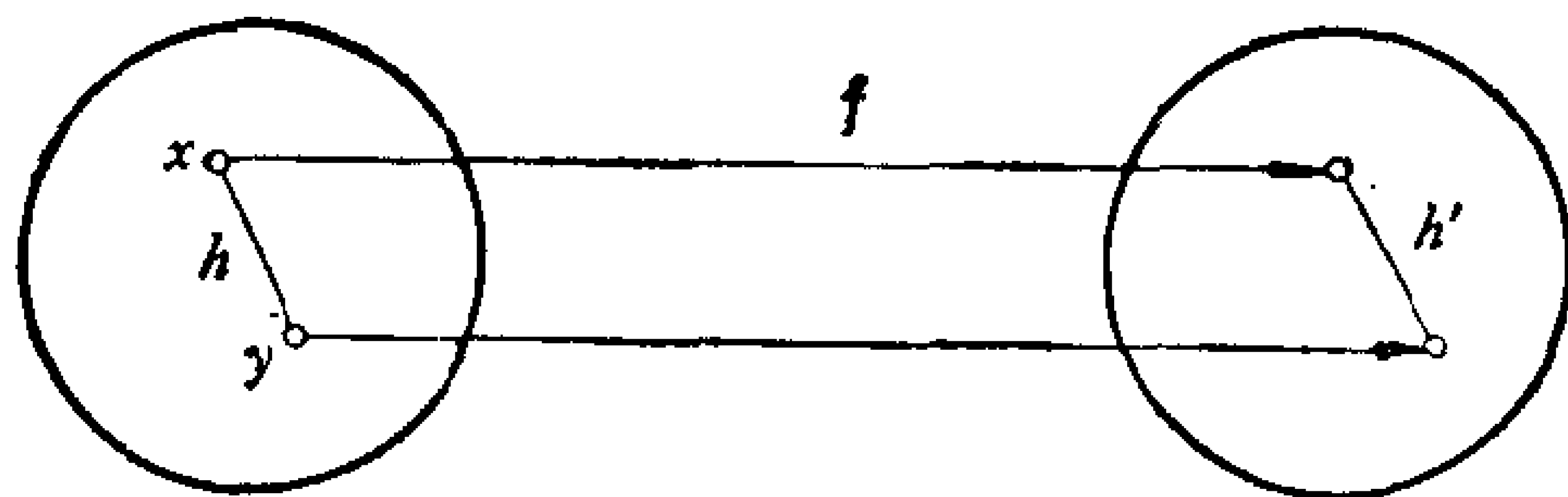


图 7 h, h' 为两个相应函数，$h(x)=y$ 当且仅当 $h'(f(x))=f(y)$

例 8　令两结构$\langle U, R_1, R_2, g, h\rangle$. $\langle U', R_1', R_2', g', h'\rangle$是同构的，并且它们分别具有二元关系 R_1, R_2 与 R_1', R_2'，一元函数 g, g'，二元函数 h, h'. 那么 f 是此二结构之间的一同构，如果下述五条均成立：

(1) f 为 U 与 U' 之间的一双射函数，

(2) 对于任意 $x, y\in U$，都有

$$xR_1y \longleftrightarrow f(x)R_1'f(y),$$

(3) 对于任意 $x, y\in U$，都有

$$xR_2y \longleftrightarrow f(x)R_2'f(y),$$

(4) 对于任意 $x\in U$，$g(x)$ 有定义，当且仅当 $g'(f(x))$ 有定义并且 $f(g(x)) = g'(f(x))$，

(5) 对于任意 $x, y\in U$，$h(x, y)$ 有定义，当且仅当

$$h'(f(x), f(y))$$

有定义，并且 $f(h(x, y)) = h'(f(x), f(y))$.

如果两个结构之间存在着一同构映射，则称这两个结构是同构的.

定理 13.5　若$\langle S_1, R_1\rangle$与$\langle S_2, R_2\rangle$是同构的（其中 R_1, R_2 是二元关系），那么，有

(1) R_1 是 S_1 的一偏序，当且仅当 R_2 是 S_2 的一偏序，

(2) S_1 有一最小元，当且仅当 S_2 有一最小元.

证明　令 f 是$\langle S_1, R_1\rangle$与$\langle S_2, R_2\rangle$的同构对应，假定 R_1 是 S_1 的一偏序，我们来证明 R_2 是 S_2 的一偏序. 首先，让我们证明 R_2 在 S_2 中是传递的. 因为，令 $y_1, y_2, y_3\in S_2$，且 $y_1R_2y_2$ 成立，$y_2R_2y_3$ 成立. 由于 f 是 S_1 与 S_2 的双射，故存在 x_1, x_2,

$x_3 \in S_1$，使得 $y_1 = f(x_1)$，$y_2 = f(x_2)$，$y_3 = f(x_3)$. 并且 $x_1R_1x_2$ 成立，当且仅当 $f(x_1)R_2f(x_2)$ 成立，即 $y_1R_2y_2$ 成立，由 $y_1R_2y_2$ 成立，就有 $x_1R_1x_2$ 成立. 类似地，我们由 $y_2R_2y_3$ 成立可得到 $x_2R_1x_3$ 成立. 由 R_1 对 S_1 传递，就有 $x_1R_1x_3$ 成立. 由同构，我们有 $f(x_1)R_2f(x_3)$ 成立，即 $y_1R_2y_3$ 成立. 故 R_2 对 S_2 是传递的，对于偏序的其它条件是不难验证的.

现在，假定 S_1 有最小元，我们来推断 S_2 也有一最小元，令 $a \in S_1$ 是 S_1 的最小元. 即对所有 $x \in S$，都有 aRx 成立，由同构就有：$f(a)R_2f(x)$ 成立，$f(a)$ 就应当是 S_2 的最小元. 因为如果 $y \in S_2$，由 f 的性质，必须有 $x \in S_1$ 使得 $y = f(x)$，但是，对于这一 x，我们有 aRx 成立，故有 $f(a)Rf(x)$ 成立. 所以，$f(a)$ 是 S_2 的最小元.

从 $\langle S_2, R_2\rangle$ 到 $\langle S_1, R_1\rangle$ 的证明是类似的.

定理 13.6 令 $\langle S, <_s\rangle$ 是一不空的线序集合并具有下述性质：

(1) 对于任一 $x \in S$，都有 $y \in S$ 使得 $x <_s y$，

(2) S 的每一不空子集合都有一个 $<_s$ 最小元，

(3) S 的每一不空的有界子集合，都有一个 $<_s$ 最大元.

那么 $\langle S, <_s\rangle$ 与 $\langle \omega, <_\omega\rangle$ 同构.

证明 我们使用递归定理来构造这一同构. 令 a 是 S 的最小元，并且令 $g(x)$ 是 S 中比 x 大的最小元. 由条件(2)，对每一 $x \in S$ 函数，$g(x)$ 是被定义的，

由递归定理，保证下述函数 $f: \omega \to S$ 是存在的：

(i) $f(0) = a$，

(ii) $f(n^+)=g(f(n))$. 即它是 S 的大于 $f(n)$ 的那个最小元.

显然,对于每一 $n\in\omega$ 我们有 $f(n)<_S f(n^+)$. 其中 $n^+=n+1$, 由归纳法,我们不难得到当 $n<m$ 时, $f(n)<f(m)$. 而且, f 是一个一一对应的函数. 现在,我们仅须证明:

$$S=\mathrm{ran}(f).$$

假定不然,即 $S\dot{-}\mathrm{ran}(f)\neq\varnothing$, 由此,可令 b 是

$$S\dot{-}\mathrm{ran}(f)$$

的最小元,那么集合 T:

$$T:=\{x\mid x<_S b\}$$

是有界的(上界为 b)和不空的, 令 c 是 T 的最大元. 因为 $c<_S b$, 我们就有一 $m\in\omega$, 使得 $c=f(m)$. 但是,不难看出, b 是 S 的大于 c 的最小元,所以 $b=f(m+1)$, 即 $b\in\mathrm{ran}(f)$, 这与 b 的选择相矛盾,故 $S=\mathrm{ran}(f)$.

习　　题

1. 证明: R 是对称的,传递的关系,当且仅当 $R=R^{-1}\circ R$.

2. 假定 $f:S\to T$, 又设 R 为 T 上一等价关系,令

$$Q:=\{\langle x,y\rangle\mid x\in S\wedge y\in S\wedge\langle f(x),f(y)\rangle\in R\}$$

证明: Q 为 S 上一等价关系.

3. 令 $N:=\omega\dot{-}\{0\}$, 令 N 上的等价关系定义为: 对于任意 n, $m\in N$,

$R(m,n)\leftrightarrow m$ 与 n 有相同个数的素数因子.

问是否有一函数 $\hat{f}$, 使得对于每一 $n\in N$, 都有:

$$\hat{f}(O_R(n))=O_R(3n)$$

呢?

4.验证§5例3中给出的函数f使得$\langle\omega\times\omega, R\rangle$与$\langle\omega, \in\rangle$是同构的.

5.令$\omega\times\omega$上的关系R满足下述条件,对于任意的$x_1, y_1, x_2, y_2\in\omega$,我们有

$$\langle x_1 y_1\rangle R\langle x_2, y_2\rangle,\text{ 当且仅当 }(x_1+y_1<x_2+y_2 \vee x_1+y_1=x_2+y_2\wedge y_1<y_2),$$

试证$\langle\omega\times\omega, R\rangle$与$\langle\omega, \in\rangle$是同构的.

6.令A为一不空集合,$S:=P(A)$,证明:$\langle S, \cup_s, \cap_s\rangle$与$\langle S, \cap_s, \cup_s\rangle$是同构的,(提示:当$x\in S$时,令$f(x)=A\dot{-}x$,并且注意:在第一结构中的$\cup_s$对应于第二结构中的$\cap_s$)

7.证明:

(1) $\langle S, R, f\rangle$与$\langle S, R, f\rangle$同构.

(2) 若$\langle S_1, R_1, f_1\rangle$与$\langle S_2, R_2, f_2\rangle$同构,则$\langle S_2, R_2, f_2\rangle$与$\langle S_1, R_1, f_1\rangle$同构.

(3) 若$\langle S_1, R_1, f_1\rangle$与$\langle S_2, R_2, f_2\rangle$同构,且$\langle S_2, R_2, f_2\rangle$与$\langle S_3, R_3, f_3\rangle$同构,则$\langle S_1, R_1, f_1\rangle$与$\langle S_3, R_3, f_3\rangle$同构.

也就是说,同构可以看作是两个有序对之间的关系,而且是等价关系.

第十四章　整数与有理数

在第五章中我们已经讨论了自然数，它们的自然次序和它们的算术．但是从算术的观点来看，自然数域不是一个很完满的数域，因为减法仅对 $x \leqslant y$ 时，$y - x$ 才有定义，而除法仅在非常特殊的情况下才能被定义，从次序角度来看也缺乏对称性．例如，它有最小元而无最大元，应用范围也嫌太窄，由于实践需要反映到理论上，有扩大数域的必要．

我们将逐步扩充数域．

§1　整　　数

在本节中，我们来构造整数的集合 $\boldsymbol{Z}$，并建立其中的次序和算术运算，$\boldsymbol{Z}$ 对减法是封闭的，它对次序是对称的．

如果对于每一个数 n，都有一个与它相反的数，即"反号数"，例如记作 $-n$，那么这时减法就总是能够进行了．因为，这时我们能够令 $0 - n = -n$，一般地，当 $x < y$ 时，

$$x - y = -(y - x).$$

现在，我们来实现这一想法，令 $\boldsymbol{N} := \omega \dot{-} \{0\}$，$\boldsymbol{N}^- := \{\langle 0, n\rangle \mid n \in \boldsymbol{N}\}$，然后，令 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{N} \cup \{0\} \cup \boldsymbol{N}^-$，我们称 $\boldsymbol{Z}$ 的元素为整数，$\boldsymbol{N}$ 的元素叫正整数，$\boldsymbol{N}^-$ 的元素叫做负整数．

现在定义“反号”运算

定义 14.1 一个数的反号数是指：

$-n:=\langle 0, n\rangle$ 当 $n\in\boldsymbol{N}$ 时，

$-0:=0$

$-\langle 0, n\rangle=n$ 当 $n\in\boldsymbol{N}$ 时.

定义 14.2 在整数集合 $\boldsymbol{Z}$ 上，建立一次序关系 $<_{\boldsymbol{Z}}$ 如下：对于 $x, y\in\boldsymbol{Z}$, $x<_{\boldsymbol{Z}}y$ 当且仅当：

$$(x\in\omega\wedge y\in\omega\wedge x<_{\omega}y)\vee(x\in\boldsymbol{N}^{-}\wedge y\in\omega)$$
$$\vee(x\in\boldsymbol{N}^{-}\wedge y\in\boldsymbol{N}^{-}\wedge -y<_{\omega}-x). \qquad (14.1)$$

其中 $<_{\omega}$ 是 ω 上的自然次序.

我们将证明 $<_{\boldsymbol{Z}}$ 是 $\boldsymbol{Z}$ 上的一线序关系，并称之为 $\boldsymbol{Z}$ 的自然次序，也称 $<_{\boldsymbol{Z}}$ 为整数的自然次序，在不引起误会时，常常记做 $<$.

定理 14.1 结构 $\langle\boldsymbol{Z}, <, -\rangle$ 有如下的性质：

(1) $\boldsymbol{Z}$ 是被 $<$ 所线序的，

(2) $\omega\subset\boldsymbol{Z}$ 并且 $\boldsymbol{Z}$ 的次序延拓了 ω 的自然次序，

(3) 对于所有 $x\in\boldsymbol{Z}$, $x\in\omega$ 当且仅当 $0\leqslant x$,

(4) 对于所有的 $x\in\boldsymbol{Z}$, $-(-x)=x$, 并且 $-0=0$,

(5) 对于所有的 $x, y\in\boldsymbol{Z}$, 若 $x<y$, 则 $-y<-x$.

性质(1)—(5)决定了结构 $\langle\boldsymbol{Z}, <, -\rangle$ 是 $\langle\omega, <\rangle$ 上的唯一的同构开拓，也就是说，如果 $\langle\boldsymbol{Z}', <', -'\rangle$ 也有性质(1)—(5)，那么就存在 $\langle\boldsymbol{Z}, <, -\rangle$ 与 $\langle\boldsymbol{Z}', <', -'\rangle$ 之间的一个同构 i，使得对于所有的 $x\in\omega$，都有 $i(x)=x$.

证明 先证(1)，$\boldsymbol{Z}$ 是被 $<$ 所线序的，事实上，它是强线

序的．也就是说它是不自反的、传递的、非对称的和$<$连接的．$\langle \boldsymbol{Z}, <\rangle$ 是不自反的，也就是对于任意的 x, $x \in \boldsymbol{Z}$, 都有 $\neg(x < x)$. 因为若 $x \in \omega$, 显然有 $\neg(x < x)$,（因为由$<$的定义，$\neg(x \in x)$ 就是 $x \not\in x$）. 若 $x \not\in \omega$, 则 $-x \in \omega$, 因此，$(-x) \not\in (-x)$, 即 $\neg((-x) < (-x))$, 所以，由 (14.1) 有 $\neg(x < x)$. $\langle \boldsymbol{Z}, <\rangle$ 是传递的，因为对于任意的 $x, y, z \in \boldsymbol{Z}$, 已知 $x < y$ 且 $y < z$, 我们希望得到 $x < z$. 依据 (14.1) 分情形进行验证，不难获得欲证结果．$\langle \boldsymbol{Z}, <\rangle$ 的非对称性也是直接获得的，因为对于任意的 $x, y \in \boldsymbol{Z}$, $x < y$, 这时我们分情形进行验证．当 $x, y \in \omega$, $x \in y$ 时，就不可能有 $y \in x$, 即必有 $y \not\in x$, 所以此时有 $x < y \to \neg(y < x)$. 当 $x \in \boldsymbol{N}^-$ 且 $y \in \omega$ 时，有 $x < y$, 并且此时不可能有 $y < x$, 故此时也有 $x < y \to \neg(y < x)$. 类似地，当 $x \in \boldsymbol{N}^-$, $y \in \omega$ 时，也有相应的结果．对于 $x \in \boldsymbol{N}^-$ 且 $y \in \boldsymbol{N}^-$, 当 $x \neq y$ 时必有且仅有 $-x <_\omega -y$ 与 $-y <_\omega -x$ 二者之一成立．因此，我们获得了 $\langle \boldsymbol{Z}, <\rangle$ 是非对称的．再证 $\langle \boldsymbol{Z}, <\rangle$ 是由$<$连接的，这是因为，对于任意 $x, y \in \boldsymbol{Z}$, 必有且仅有下述四种情形之一成立

(i) $x \in \omega \wedge y \in \omega$,

(ii) $x \in \omega \wedge y \in \boldsymbol{N}^-$,

(iii) $x \in \boldsymbol{N}^- \wedge y \in \omega$,

(iv) $x \in \boldsymbol{N}^- \wedge y \in \boldsymbol{N}^-$.

由 (14.1)，上述 (i)—(iv) 的任一条，都可获得欲证结果．综上，我们证明了(1)，即 $\langle \boldsymbol{Z}, <\rangle$ 是线序的结构．

再证(2)，由 $\boldsymbol{Z}$ 的定义，显然有 $\omega \subset \boldsymbol{Z}$, 因此，我们仅须证

明 $\boldsymbol{Z}$ 的次序 $<_Z$ 延拓了 ω 的自然次序 $<_\omega$. 这里所谓延拓是指下述条件成立

(v) $\forall x\in\omega\forall y\in\omega(x<_\omega y\leftrightarrow x<_Z y)$.

由(14.1),这是显然的.

(3)与(4) 由定义 14.1 与(14.1)式是显然的,这里从略.

现在证明(5),假定 $x, y\in\boldsymbol{Z}$, 且$x<_Z y$, 则:

若 $x, y\in\omega$, 故 $x<_\omega y$. 因此由(14.1)有 $-y<_Z-x$

若 $x\in\boldsymbol{N}^-$, $y\in\omega$, 我们获得 $-x\in\boldsymbol{N}$, 而且

$-y\in\boldsymbol{N}^-\cup\{0\}$, 这样 $-y<-x$.

若 $x, y\in\boldsymbol{N}^-$, 那么由 $<_Z$ 的定义,我们就有

$$-y<-x.$$

现在来证唯一性, 令 $\langle\boldsymbol{Z}', <', -'\rangle$ 也满足性质(1)—(5),我们定义映射 g 如下:

$$g(a):=a,\qquad 当\ a\in\omega, \tag{14.2}$$

$$g(-a):=-'a,\ 当\ a\in\boldsymbol{N} \tag{14.3}$$

这样, g 是从 $\boldsymbol{Z}$ 到 $\boldsymbol{Z}'$ 的一函数, 使得对于所有的 $a\in\omega$ 都有 $g(a)=a$. 现在证明 $\operatorname{ran}(g)=\boldsymbol{Z}'$,因为令 $a\in\boldsymbol{Z}'$, 若 $0\leqslant' a$, 由(3)则 $a\in\omega$, 由(14.2)式就有 $a=g(a)$, 若 $a<'0$,则

$$0=-'0<'-'a,$$

这样 $-'a=b\in N$. 我们就断定

$$g(-b)=-'b=-'(-a)=a.$$

类似地,我们能够证明 g 是一对一的. 因此,它就是一个同构映射(借助于 $g(-a)=-'g(a)$), $a<b$ 当且仅当

$$g(a)<'g(b).$$

按照通常的规则，容易定义整数上的算术运算，并证明算术的基本性质．定义和证明都区分为使用自然数和负整数这两种情况：首先，当 $a\in\boldsymbol{Z}$ 时，我们定义 a 的绝对值如下：

$$|a|:=a \quad \text{当 } 0\leqslant a \tag{14.4}$$

$$|a|:=-a \quad \text{当 } a<0. \tag{14.5}$$

显然，对于所有的 $a\in\boldsymbol{Z}$，都有 $0\leqslant|a|$，并且 $|a|=0$，当且仅当 $a=0$。

在下边的定义中，我们仍然使用具有下标 ω 的运算表示在自然数集合上的运算．

定义 14.3 现在我们建立整数的加法如下：

(1) 当 $0\leqslant a$ 且 $0\leqslant b$ 时，$a+b:=a+_\omega b$，

(2) 当 $a<0$ 且 $b<0$ 时，$a+b:=-(|a|+_\omega|b|)$，

(3) 当 $0\leqslant a$，且 $b<0$，且 $|b|\leqslant|a|$ 时，

$$a+b:=|a|-_\omega|b|,$$

(4) $0\leqslant a$ 且 $b<0$ 且 $|a|<|b|$ 时，

$$a+b:=-(|b|-_\omega|a|),$$

(5) $a<0$，$0\leqslant b$ 时，$a+b:=b+a$.

定义 14.4 对于任意的 $a,b\in\boldsymbol{Z}$，关于它们的减法被定义作：

$$a-b:=a+(-b),$$

特别地，$0-b=-b$.

定理 14.2 对任意 $a,b\in\boldsymbol{Z}$，关于它们的加法，我们有以下性质：

I. $a+b=b+a$,

II. $a+(b+c)=(a+b)+c$,

III. $a+0=a$,

IV. $a+(-a)=0$,

V. $(a-b)+b=a$.

证明　现在我们证明性质I. 依据定义 14.3，须区分五种情况，对于情况(1)，当 $0\leqslant a$, $0\leqslant b$ 时，即 $a\in\omega$, $b\in\omega$，因为 $a+_{\omega}b=b+_{\omega}a$，所以，由定义 14.3(1)，我们有

$$a+b=b+a.$$

对于情况(2)，当 $a<0$ 且 $b<0$ 时，有

$$a+b:=-(|a|+_{\omega}|b|)=-(|b|+_{\omega}|a|)=b+a.$$

对于情况(3)，当 $0\leqslant a$, $b<0$ 且 $|b|\leqslant|a|$ 时，有

$$a+b:=|a|-_{\omega}|b|.$$

并且此时，由定义 14.3(5)，有：

$$b+a:=a+b.$$

所以，欲证结果成立.

对于情况(4)，我们不难验证欲证结果成立，而情况(5)由于分别还原到了(3)与(4)，因此，在任何情况下，都有

$$a+b=b+a$$

成立.

我们把 II—V 的证明留给读者.

定义 14.5　对于任意的 $a, b\in\boldsymbol{Z}$，关于它们的算术乘法被定义作：

(1) $a\cdot b:=|a|\cdot_{\omega}|b|$，当 $0\leqslant a$, $0\leqslant b$ 或者

$$a<0,\quad 且\quad b<0,$$

(2) $a \cdot b := -(|a| \cdot_{\omega} |b|)$. 当 $0 \leqslant a$ 且 $b < 0$ 或者 $a < 0$ 且 $0 \leqslant b$.

定理 14.3 关于整数的乘法，我们可以证明下述性质成立

VI. $a \cdot b = b \cdot a$,

VII. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,

VIII. $a \cdot 1 = a$, $a \cdot 0 = 0$,

IX. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,

X. 若 $a \cdot b = 0$, 则 $a = 0$ 或 $b = 0$.

证明 我们证明性质 VI. 由定理 5.8，并依据定义 14.5，我们可获得欲证结果. 因为当定义 14.5(1) 的条件成立时，有

$$
\begin{aligned}
a \cdot b &= |a| \cdot_{\omega} |b| && (\text{由定义 } 14.5(1)) \\
&= |b| \cdot_{\omega} |a| && (\text{由定理 } 5.8) \\
&= b \cdot a. && (\text{由定义 } 14.5(1))
\end{aligned}
$$

当定义 14.5(2) 的条件成立时，有

$$
\begin{aligned}
a \cdot b &= -(|a| \cdot_{\omega} |b|) && (\text{由定义 } 14.5(2)) \\
&= -(|b| \cdot_{\omega} |a|) && (\text{由定理 } 5.8) \\
&= b \cdot a. && (\text{由定义 } 14.5(2))
\end{aligned}
$$

这就完成了性质 VI 的证明.

对于性质 VII，在 $0 \leqslant a$, $0 \leqslant b$, $0 \leqslant c$ 或者 $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$ 的情况下，由定义 14.5(1)，VII 显然成立. 对于其它情况也是不难的，例如当 $a < 0$, $b < 0$, $0 < c$ 时，有：

$$(a\cdot b)\cdot c=(|a|\cdot_\omega|b|)\cdot c$$
$$=(|a|\cdot_\omega|b|)\cdot_\omega|c|.$$

而此时，$b\cdot c=-(|b|\cdot_\omega|c|)$.

由定义 14.5(2)，

$$a\cdot(b\cdot c)=|a|\cdot_\omega(|b|\cdot_\omega|c|)$$
$$=(|a|\cdot_\omega|b|)\cdot_\omega|c|.$$

所以，有：$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.

对于性质 VIII，当 $a\in\omega$ 时，显然有 $a\cdot 1=a$，当 $a\in \boldsymbol{N}^-$ 时，有

$$a\cdot 1=-(|a|\cdot_\omega 1)\quad(\text{由定义 14.5(2)})$$
$$=-(|a|)$$
$$=a.\quad(\text{由(14.5)式})$$

当 $a\in\omega, a\cdot 0=0$，而 $a\in \boldsymbol{N}^-$ 时，显然

$$a\cdot 0=-(|a|\cdot_\omega 0)$$
$$=-0$$
$$=0.$$

这就完成了性质 VIII 的证明.

性质 IX 与 X 留给读者证明.

定理 14.4 整数集合 $\boldsymbol{Z}$ 的下述性质关系到在算术运算中的次序关系.

XI. $a<b$，当且仅当 $0<b-a$，

XII. 若 $a<b$，则 $a+c<b+c$，

XIII. 若 $a<b$，且 $0<c$，则 $a\cdot b<b\cdot c$.

证明 先证性质 XI，当 $a, b\in\omega$，因为这时由 $a<b$，就

有 $|-a|<|b|$，所以有

$$b-a=b+(-a)$$
$$=|b|-_{\omega}|a|.$$

由算术差的定义，显然有 $0<|b|-_{\omega}|a|$，所以有

$$0<b-a.$$

反之，若 $0<b-a$，即 $b-a\in\omega$. 故

$$b-a=b-_{\omega}a.$$

所以，我们有 $0<b-_{\omega}a$ 因此 $a<b$.

当 $b\in\omega$ 且 $a\in\boldsymbol{N}^-$ 时，$-a\in\boldsymbol{N}$，所以

$$b-a=b+(-a)\in\boldsymbol{N}.$$

故此时有 $a<b$ 成立.

当 $b, a\in\boldsymbol{N}^-$ 时，由 $a<b$ 有 $-b<_{\omega}-a$，这就是

$$|b|<_{\omega}|a|,$$

故此时有

$$b-a=b+(-a)$$
$$=(-a)+b$$
$$=|a|-_{\omega}|b|.$$

这时，$0<|a|-_{\omega}|b|$，故 $0<b-a$.

反之，当 $0<b-a$，故 $b-a\in\omega$，由此，我们获得

$$|b|<_{\omega}|a|.$$

由于 $a,b\in\boldsymbol{N}^-$，所以，我们有 $a<b$.

综上，我们已完成了性质 XI 的证明.

我们把性质 XII 的证明留给读者.

现在，我们来证明性质 XIII. 当 $a, b\in\omega$ 时，性质 XIII

已还原为定理 5.9(5). 当 $a\in \boldsymbol{N}^-$, $b\in\omega$ 时,由定义 14.5,有 $a\cdot c<0$, 即 $a\cdot c\in\boldsymbol{N}^-$, 并且 $b\cdot c\in\omega$, 所以结论成立. 当 $a\in\boldsymbol{N}^-$, $b\in\boldsymbol{N}^-$ 时,有

$$a\cdot c=-(|a|\cdot_\omega|c|),$$
$$b\cdot c=-(|b|\cdot_\omega|c|).$$

并且由 $a<b$, 得到 $-b<-a$, 即有 $|b|<|a|$, 故有

$$|b|\cdot_\omega|c|<|a|\cdot_\omega|c|$$
$$-(|a|\cdot_\omega|c|)<-(|b|\cdot_\omega|c|)$$
$$a\cdot c<b\cdot c.$$

这就完成了性质 XIII 的证明.

定理 14.5 $\langle\boldsymbol{Z},<\rangle$ 是唯一的(在同构意义下)线性有序集合,使得

(1) 对于每一个 $x\in\boldsymbol{Z}$, 存在一个 $y\in\boldsymbol{Z}$, 使得 $x<y$, 并且存在一个 $z\in\boldsymbol{Z}$, 使得 $z<x$ (即 $\boldsymbol{Z}$ 中无最大元也无最小元).

(2) $\boldsymbol{Z}$ 的每个不空的有界子集合都有一个最小元和最大元.

证明 为了证明 $\langle\boldsymbol{Z},<\rangle$ 有性质(1),仅须令

$$y=x+1,\quad z=x-1,$$

为了证明 (2), 令 $S\subset\boldsymbol{Z}$ 不空, 有界, 若 $S\cap\omega\neq\varnothing$, 令 m 是 $S\cap\omega$ 的最大元(在 $<_\omega$ 之下), 那么, m 就是 S 的最大元, 若 $S\cap\omega=\varnothing$. 即 $S\subset\boldsymbol{N}^-$. 令 $S^-:=\{-x\mid x\in S\}$, 当然 $S^-\subset\omega$. 令 n 是 S^- 的最小元(在 $<_\omega$ 之下),则 $-n$ 是 S 的最大元.

最小元的存在性证明是类似的,从略.

现在证唯一性，我们假定 $\langle \boldsymbol{Z}', <' \rangle$ 也有性质(1)与(2)。让我们任意挑选一 $x_0 \in \boldsymbol{Z}'$，令

$$\boldsymbol{N}' := \{x \mid x \in \boldsymbol{Z}' \wedge x_0 <' x\}.$$

$$\boldsymbol{N}'^{-} := \{x \mid x <' x_0 \wedge x \in \boldsymbol{Z}'\},$$

让我们使用定理 13.6，我们能够看出 $\langle \{x_0\} \cup \boldsymbol{Z}', <' \rangle$ 满足它的前提，所以，它是 $\langle \omega, < \rangle$ 的一同构象(我们可令这一同构映射为 i^*)，类似地，$\langle \{x_0\} \cup \boldsymbol{N}'^{-}, <'^{-1} \rangle$ (其中 $<'^{-1}$ 为 $<'$ 的逆)也是 ω 的一同构象(我们可以令此同构映射为 i^-)，并且有 $x_0 = i^*(0) = i^-(0)$，现在定义

$i: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}'$ 如下:

$i(n) = i^*(n)$ 当 $0 \leqslant n$

$i(n) = i^-(-n)$ 当 $n \leqslant 0$

容易验证，i 是 $\langle \boldsymbol{Z}, < \rangle$ 与 $\langle \boldsymbol{Z}' <' \rangle$ 之间的一个同构.

习　　题

1.证明定理 14.2 中的性质 II.

2.证明定理 14.2 中的性质 III.

3.证明定理 14.2 中的性质 IV.

4.证明定理 14.2 中的性质 V.

5.证明定理 14.3 中的证明 IX.

6.证明定理 14.3 中的证明 X.

7.证明：对于每一 $x \in \boldsymbol{Z}$，在 $\boldsymbol{Z}$ 中都存在 x 的一个后继(即有一个 $y \in \boldsymbol{Z}$，使得 $x < y$ 并且不存在 $t \in \boldsymbol{Z}$ 满足 $x < t < y$)。而且对于每一元 $x \in \boldsymbol{Z}$，在 $\boldsymbol{Z}$ 中都有 x 的前驱 $z \in \boldsymbol{Z}$ (即有一个 $z \in \boldsymbol{Z}$，使得 $z < x$，并且不存在 $u \in \boldsymbol{Z}$，满足 $z < u < x$)。

8.令 $a, b \in \boldsymbol{Z}$ 且 $a < b$，证明区间

$$[a, b]:=\{x \mid x \in \boldsymbol{Z} \wedge a \leqslant x \leqslant b\}$$

是一有穷集合.

9.令 $\langle S, <_{s}\rangle$ 是一线性有序集合,使得:

(1) S 中无最大元,也无最小元.

(2) S 的每一有界子集合都是有穷的.

那么 $\langle S, <_{s}\rangle$ 与 $\langle \boldsymbol{Z}, <\rangle$ 同构.

10.若 $S \subset \boldsymbol{Z}$, 且 $S \neq \varnothing$, S 有上界,则 S 有一最大的元素.

§2 有 理 数

在整数集合上我们已经建立了加法、减法和乘法的运算,但是除法却无法在 $\boldsymbol{Z}$ 上完整地建立起来. 也就是说, $\boldsymbol{Z}$ 对除法来讲是不封闭的.

如果存在唯一的数 c, 使得 $a=b \cdot c$, 我们称一数 a 对于数 b 是可除的. 这个唯一的数 c 就叫 a 除 b 的商,在 $\boldsymbol{Z}$ 中许多数是没有商的,例如数 3 被 2 除的商为 $\frac{3}{2}$ 就不在 $\boldsymbol{Z}$ 中.

我们来扩充整数系使得在新的数系中对于所有的数 a, $b \neq 0$, a 对于 b 都是可除的,并且通常的算术定律 (例如 §1 中 VI—XIII) 都是成立的. 我们称这一新的数系为有理数域,并记做 $\boldsymbol{Q}$, 也可以说,在有理数系 $\boldsymbol{Q}$ 中, 对乘法的逆运算(除法)是封闭的,即对于任意 $b \neq 0$,方程 $b \cdot x=1$ 的解在 $\boldsymbol{Q}$ 中总是存在唯一的. 为了获得数系 $\boldsymbol{Q}$, 我们给出如下的定义.

定义 14.6

令

$$\boldsymbol{Q}^{\prime}:=\boldsymbol{Z} \times(\boldsymbol{Z} \dot{-}\{0\})=\{\langle a, b\rangle \mid a \in \boldsymbol{Z} \wedge b \in \boldsymbol{Z} \wedge b \neq 0\}.$$

并且称 Q' 是 Z 上的因式的集合，对于 $\langle a, b\rangle \in Q'$ 时，我们用 a/b 代替 $\langle a, b\rangle$，我们在 Q' 上定义一关系 $\simeq$ 如下：

$$a/b \simeq c/d \text{ 当且仅当 } a \cdot d = b \cdot c.$$

定理 14.6 上述定义的$\simeq$是一等价关系.

我们来证明这一定理，即证明$\simeq$是一等价关系：

(1) 自反性：$a/b \simeq a/b$，因为 $a \cdot b = b \cdot a$，

(2) 对称性：若 $a/b \simeq c/d$，我们有 $a \cdot d = b \cdot c$，即 $c \cdot b = d \cdot a$，这样就有 $c/d \simeq a/b$.

(3)传递性：若$a/b \simeq c/d$ 且 $c/d \simeq e/f$，我们就获得 $a \cdot d = b \cdot c$，$c \cdot f = d \cdot e$，所以

$$a \cdot d \cdot c \cdot f = b \cdot c \cdot d \cdot e,$$

现在 $d \neq 0$，这样，$a \cdot c \cdot f = b \cdot c \cdot e$，若 $c \neq 0$，我们就有 $a \cdot f = b \cdot e$，即 $a/b \simeq e/f$. 若 $c = 0$，则 $a = 0, e = 0$，所以也有 $a/b \simeq e/f$.

定义 14.7

令

$Q := Q'/\simeq$ 是 Q' 对$\simeq$的等价类的商集合. Q 的元素叫做有理数，它们可以用 $a \div b$ 或 a/b 表示，事实上，当 a/b 表示非整数的有理数时，我们可以限制 a, b 为互素的整数，这时就取它作为相应等价类的代表元. 当 a/b 为一整数时，我们取 c，使得 $c/1 = a/b$. 也就是说，对于任意的 $a \in Z$, $b \in Z$ 且 $b \neq 0$，我们取 $p, q \in Z$ 且 p, q 互素，并且

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b}.$$

并记做 $\frac{p}{q}=\psi\left(\frac{a}{b}\right)$, $\frac{p}{q}$ 就作为等价类 $\frac{a}{b}$ 中的代表元，也就是说，$\frac{p}{q}$ 是上述等价类对应的采样集合的元素．在

$$\frac{a}{b}\in \boldsymbol{Z}$$

时，我们令 $q=1$，且取 p，使得 $\frac{p}{1}=\frac{a}{b}$. 可以称 ψ 为采样函数.

显然，整数集合 $\boldsymbol{Z}$ 是一一对应地映射到 $\boldsymbol{Q}$ 内的，我们可以如下地给出这一映射：任意 $a\in \boldsymbol{Z}$，令

$$i(a)=a/1.$$

这样，0/1 表示数 0，1/1 表示数 1，$-1/1$ 表示数 -1，我们现在可以定义有理数的加法和乘法如下：对于任意的 a/b, $c/d\in \boldsymbol{Q}$，令

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}:=\psi\left(\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\right),$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\psi\left(\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\right).$$

为了说明上述定义的合理性，我们应当证明：

定理 14.7 对于 $\boldsymbol{Q}$ 有下述性质成立：

(1) 有理数的上述加法，乘法定义是良定义的，并且它们对于 $\boldsymbol{Q}$ 是封闭的，

(2) 对于整数、新定义和原定义的运算是一致的，更确切地说，上述定义的 i 是 $\langle \boldsymbol{Z}, 0, 1, +, \cdot\rangle$ 和 $\langle \mathrm{ran}(i), 0/1, 1/1, +, \cdot\rangle$ 的一同构映射，且 $\mathrm{ran}(i)\subset \boldsymbol{Q}$.

(3) $\langle \mathrm{ran}(i), 0/1, 1/1, +, \cdot\rangle$ 满足 § 1 中的性质 I—X,

(4) 若 $p\in\mathbf{Q}$, $q\in\mathbf{Q}$, 且 $q\neq 0/1$, 则等式 $p=q\cdot x$ 有唯一的解 $x\in\mathbf{Q}$, 这样,有理数的除法就被定义了,当除数不为零时,我们可以使用运算符号÷表示,记做:

$$x=p\div q.$$

我们概要地证明上述(1)—(4)

证明 (1) 当 $a/b\in\mathbf{Q}$, $c/d\in\mathbf{Q}$

$$a/b+c/d=\phi\left(\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\right).$$

显然, $a\cdot d+b\cdot c$ 与 $b\cdot d$ 不一定互素, 但对其比值取 ϕ 后,即得一对数 p, q 互素的,并且

$$\frac{p}{q}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

故 $\phi\left(\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\right)$ 即 $\frac{p}{q}$ 为 $\mathbf{Q}$ 中元素.

类似地,我们有 $\phi\left(\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\right)\in\mathbf{Q}$.

证明 (2) 若 a, $b\in\mathbf{Z}$, 则

$$\begin{aligned} i(a+b)&=\frac{a+b}{1}\\ &=a/1+b/1\\ &=i(a)+i(b). \end{aligned}$$

对于乘法是类似的.

证明 (3) 我们仅证明性质Ⅳ, 其余的留给读者自己证明. a/b 的反号数定义为

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}.$$

因此

$$a/b+\left(-\frac{a}{b}\right)=\psi\left(\frac{a\cdot b+b\cdot(-a)}{b\cdot b}\right)$$

$$=\psi\left(\frac{a\cdot b-a\cdot b}{b\cdot b}\right)$$

$$=\psi\left(\frac{0}{b\cdot b}\right)$$

$$=0/1.$$

证明（4） 令 $A=\frac{a}{b}$, $B=\frac{c}{d}\neq 0/1$，为解方程 $A=B\cdot x$，令 $x=\psi\left(\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\right)$，这是可能的，因为 $b\neq 0$，$c\neq 0$，那么 $c/d\cdot\frac{a\cdot d}{b\cdot c}=a/b$.

现在，我们把整数的次序延拓到有理数的次序

首先，应注意到每一个有理数都能够表达为 a/b，使得 $0<b$.

定义 14.8 我们定义有理数的自然次序如下：令 $0<b$，$0<d$ 且

$$a/b<\frac{c}{d}，\text{当且仅当 } a\cdot d<b\cdot c$$

不难验证，上述定义是合理的.

现在，我们来讨论有理数的集合论性质和次序的性质.

定义 14.9 一有序集合 $\langle S,<\rangle$ 叫做稠密的，如果它至少有两个元素，并且对于所有的元 x, $y\in S$, $x<y$，那么就一定有一元素 $z\in S$，使得 $x<z<y$.

我们也称一线序集合的最小元和最大元(如果存在的话)

为该集合的端点(最小元称为左端点,最大元称为右端点).

定理 14.8 $\langle \mathbf{Q}, < \rangle$ 是一稠密的线序集合，并且是没有端点的.

证明 先证 $\mathbf{Q}$ 没有端点,因为任一 $a/b \in \mathbf{Q}$ 都有

$$a/b - 1 \in \mathbf{Q} \quad 且 \quad a/b + 1 \in \mathbf{Q}.$$

再证, $\mathbf{Q}$ 是稠密的,令 a, b 为有理数,并且 $a < b$, 假定 $a = p_1/q_1$, $b = p_2/q_2$, 其中 $0 < q_1$, $0 < q_2$, 现在令

$$x = \psi\left(\frac{p_1q_2 + p_2q_1}{2q_1 \cdot q_2}\right),$$

即 $x = (a + b)/2$. 不难验证 $a < x < b$ 成立.

习　　题

1. 如果 $\langle S, < \rangle$ 是稠密的,且 $a, b \in S$, $a < b$ 则开区间:

$$(a \cdot b) := \{x \mid x \in S \wedge a < x < b\}$$

不能是一有穷集合.

2. 证明 $\langle \mathbf{Q}, <, +, -, \cdot \rangle$ 满足性质 I.
3. 证明 $\langle \mathbf{Q}, <, +, -, \cdot \rangle$ 满足性质 II.
4. 证明 $\langle \mathbf{Q}, <, +, -, \cdot \rangle$ 满足性质 III.
5. 证明 $\langle \mathbf{Q}, <, +, -, \cdot \rangle$ 满足性质 V.
6. 证明 $\langle \mathbf{Q}, <, +, -, \cdot \rangle$ 满足性质 VI.
7. 证明 $\langle \mathbf{Q}, <, +, -, \cdot \rangle$ 满足性质 VII.
8. 证明 $\langle \mathbf{Q}, <, +, -, \cdot \rangle$ 满足性质 VIII.
9. 证明 $\langle \mathbf{Q}, <, +, -, \cdot \rangle$ 满足性质 IX.
10. 证明 $\langle \mathbf{Q}, <, +, -, \cdot \rangle$ 满足性质 X.

第十五章　实数的构造

我们已经定义了自然数、整数、有理数和它们的集合，在数学上还有两个重要的数系——实数系和复数系．由实数系去构造复数系并不难，因此本书不讨论复数系的，而只讨论实数系的构造．大家知道，仅有有理数是不够用的．早在公元前五世纪，古希腊的毕达哥拉斯学派的希普斯(Hippasus)就发现了等腰直角三角形的直角边与其斜边的长度是不可通约的，从而导致了无理数 $\sqrt{2}$ 的发现，后来人们又逐渐认识了 $\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，圆周率 π，以及其它许多重要的无理数．但却没有完整的理论．直至上世纪末，在集合论逐步建立和发展的基础上，外尔斯特拉斯 (Weierstrass, 1815—1897)；狄德金 (Dedekind, 1831—1916) 和康托尔 (Cantor, 1845—1918) 等著名数学家才建立了无理数、实数的完整而又严谨的数学理论．实数理论虽然存在着不同的表述方式，但实质上都是相同的．我们知道，从有理数系到实数系的过渡是在集合论的基础上进行的．本章的目的就是完成这一构造，建立严谨的实数系统．

§1　基本函数与基本序列

定义 15.1　一函数

$$f:\omega \to \mathbf{Q}, \tag{15.1}$$

如果它满足条件:

$$\exists x \in \mathbf{Q} \forall n \in \omega |f(n)| < x; \tag{15.2}$$

$$\exists n \in \omega \forall m \in \omega \forall i \in \omega (n \leqslant m \wedge n \leqslant i \wedge m \leqslant i \rightarrow f(m) \leqslant f(i)). \tag{15.3}$$

称函数 f 是基本的. 其中 ω 为自然数集合, $\mathbf{Q}$ 为有理数集合, $|f(n)|$ 为 $f(n)$的绝对值, $<$, $\leqslant$为 $\mathbf{Q}$ 中的自然顺序,有时我们也称满足条件(15.2)的函数 f 是有界的,满足条件(15.3)的函数为递增的.

今后,我们用公式 $BF(f)$表示 f 是一基本函数,并且我们也把这一函数类记做 B.当 f 为一基本函数,就称下面形式的值

$$f(0), f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots\cdots \tag{15.4}$$

为一基本序列. 也常常把(15.4)写做:

$$r_0, r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\cdots. \tag{15.5}$$

引理 15.1 当函数 $f:\omega \rightarrow \mathbf{Q}$ 取常数值时, 它是基本的, 即对于任一个 $r \in \mathbf{Q}$, 由(15.5)可知

$$r, r, r, \cdots, r, \cdots\cdots$$

为一基本序列.

引理 15.2 存在着不是常函数的基本函数.

这一引理仅须给出一个不是常函数的基本函数就够了. 但是,为了较深入的理解基本函数和基本序列的概念,我们不妨多举几个例子. 按照下述方法, 读者还可以给出更多的例子来.

例 1 令

$$f_1(n) = 1 - \frac{1}{n+1}, (n \in \omega).$$

这样我们就获得序列:

$$r_0 = 0, \quad r_1 = 1 - \frac{1}{2},$$

$$r_2 = 1 - \frac{1}{3}, \cdots, \quad r_n = 1 - \frac{1}{n+1}, \cdots\cdots$$

即:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots,$$

$$\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}, \cdots\cdots. \tag{15.6}$$

不难验证(15.6)满足条件(15.2)和(15.3);也就是说它是一基本序列.

例 2 前边已经指出 $\sqrt{2}$ 不是有理数,因为假定它是有理数,即有互素的整数 P, q 使得

$$\frac{P}{q} = \sqrt{2}, \quad 故 \quad \left(\frac{P}{q}\right)^2 = 2.$$

因此有 $P^2 = 2q^2$, 令 $P = 2^i P_1$, $q = 2^j q_1$, 使得其中 P_1, q_1 为奇数,于是

$$P^2 = 2^{2i} P_1^2, \quad 2q^2 = 2^{2j+1} q_1^2,$$

从等式 $P^2 = 2q^2$, 获得 $2^{2i} P_1^2 = 2^{2j+1} q_1^2$, 这与原设矛盾,左端含有 2 的偶次幂而右端则含有 2 的奇次幂. 故 $\sqrt{2}$ 不是一有理数. 但可用一串有理数近似地去逼近它,例如取

$$a_0 = 1, a_1 = 1.4, a_2 = 1.41, a_3 = 1.414, \cdots.$$

这些值中的每一个都是有理数（有限的十进制小数），这里所取的近似值每一个都大于等于它前面的一个. 对于这些数 $a_n(n\in\omega)$，当 n 越来越大时，它的值的平方 a_n^2 就越来越接近于整数 2. 即序列

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\cdots \qquad (15.7)$$

是递增的（即对所有的 n，永远有 $a_n \leqslant a_{n+1}$）和有界的. 我们所取定的这一序列还具有如下性质：假如在它的每一项中的十进位数的最后一位数上加上 1，得到的数的平方就大于 2，即：

$$a_i^2 < 2 < \left(a_i + \frac{1}{10^i}\right)^2,$$

从而，有

$$0 < 2 - a_i^2 < \left(a_i - \frac{1}{10^i}\right)^2 - a_i^2$$

$$= \frac{2a_i}{10^i} + \left(\frac{1}{10^i}\right)^2.$$

显然，当 i 越来越大时，数 $\frac{2a_i}{10^i} + \left(\frac{1}{10^i}\right)^2$ 就越来越小（但永大于 0），并无限地趋近于 0.

例 3 设 $f_3:\omega\to Q$，并且 $f_3(0)=1$，当 $0<n$ 时取值：$f_3(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，对于每一自然数 n，a_n 均为有理数

$$\left(a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = \frac{9}{4}, a_3 = \frac{64}{27} \text{ 等等}\right).$$

不难证明这时(15.7)也是一基本序列.

§2 基本序列的等价关系和实数的定义

定义 15.2 设 f, g 为两个基本函数，我们如下规定它们的等价关系 $\simeq$：

$$f \simeq g \longleftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbf{Q}(\varepsilon > 0 \wedge \exists n \in \omega \forall m \in \omega(n \leqslant m \rightarrow |f(m) - g(m)| < \varepsilon)). \tag{15.8}$$

引理 15.3 如上定义的关系 $\simeq$ 是 B 上的等价关系。

证明 $\simeq$ 的自反性和对称性都是显然的。

$\simeq$ 的传递性，由有理数的下述不等式

$$|a_n - c_n| \leqslant |a_n - b_n| + |b_n - c_n|$$

即可推知。

这样给出 B 的等价关系以及利用这个关系将 B 划分为等价类作为实数的定义是外尔斯特拉斯的一个很深刻的思想，比如序列 (15.6) 和常函数 $f(n) = 1(n \in \omega)$ 所获得的序列都在同一等价类中，读者还可以列举更多的类似的例子。

引理 15.4 若 $f: \omega \rightarrow \mathbf{Q}$，$g: \omega \rightarrow \mathbf{Q}$ 都是常函数，并且 $f \simeq g$，那么 $f = g$。

证明 假定 $f(n) = r_1$，$g(n) = r_2$ 并且 $r_1 \neq r_2$，不失一般性，设 $r_1 < r_2$，取 $\varepsilon = r_2 - r_1 > 0$，这时显然我们可获得 f 与 g 是不等价的。

定义 15.3 函数 $f: \omega \rightarrow \mathbf{Q}$，如果有

$$\exists n \in \omega \exists r \in \mathbf{Q} \forall m \in \omega(n \leqslant m \rightarrow f(m) = r).$$

则称函数 f 是后段常值的。

引理 15.5 若 f, g 都是后段常值的，并且 $f \simeq g$，那么总有 $n \in \omega$，使得：

$$f \upharpoonright \omega \dot{-} n = g \upharpoonright \omega \dot{-} n.$$

不难看出引理 15.4 仅是引理 15.5 的一特殊情况，并且类似于引理 15.4 的证明，不难获得引理 15.5 的证明，这里从略。

定义 15.4 我们令

$$\boldsymbol{R} := B/\simeq,$$

并且称 $\boldsymbol{R}$ 为实数集合，$x \in \boldsymbol{R}$，称 x 是一实数.

注 1 定义 15.4 关于商集合 $\boldsymbol{R}$ 的取法，我们可以规定：对于任意 $x \in \boldsymbol{R}$，如果在等价类 x 中有一常数 $f:\omega \to \boldsymbol{Q}$，即有 $r \in \boldsymbol{Q}$ 使得 $f(n) = r$ 成立（$n \in \omega$）时，我们就取 r 表达这一等价类 x，并称 x 为有理数，仍记做 r. 这种规定是合理的，由引理 15.4 和 15.5 即可证明.

注 2 熟悉极限方法的读者不难看出，当 $x \in \boldsymbol{R}$ 时，x 中任一元的极限就是我们要定义的实数 x，同一等价类中的有共同的极限值. 这个等价类确定了一个实数. 而 $B/\simeq$ 就是实数集合.

注 3 对于等价于上节例 2 的基本序列 (15.7) 作成的等价类，可取其中任一基本序列用来表示 $\sqrt{2}$. §1 例 3 中的基本序列的等价类，所定义的实数通常记做 e.

§3 实数的自然次序与四则运算

定义 15.5 对于任意的 $f, g \in B$，定义

$$f \leqslant_B g \longleftrightarrow \forall\varepsilon \in \mathbf{Q}\exists n \in \omega\forall m \in \omega(0 < \varepsilon \wedge n \leqslant m$$

$$\rightarrow g(m) - f(m) > \varepsilon). \qquad (15.9)$$

$$f <_B g \longleftrightarrow f \leqslant_B g \wedge \neg(f \simeq g). \qquad (15.10)$$

引理 15.6 由上述公式(15.9)与(15.10)定义的 $<_B$ 是传递的和非对称的.

可由(15.9)直接得证.

引理 15.7 若 $f, g \in B$，则下述三岐性成立:

$$f <_B g, \quad f \simeq g, \quad g <_B f.$$

证明由定义 15.1，15.2 和 15.5 及有理数的三岐性直接获得的，从略.

由上述引理和定义 15.4 与 15.5 我们可以直接获得实数自然次序 $<_R$ 和它的性质.

现在我们来定义实数的四则运算:

定义 15.6 对于任意的实数 x, y，我们任取 f, g 分别表示 x 与 y 的基本函数，我们令

(1) $x + y$ 为基本序列

$$f(0) + g(0), f(1) + g(1), \cdots, f(n) + g(n) \cdots\cdots$$

所确定;

(2) $x - y$ 为基本序列:

$$f(0) - g(0), f(1) - g(1), \cdots, f(n) - g(n), \cdots\cdots$$

所确定;

(3) $x \cdot y$ 为基本序列:

$$f(0) \cdot g(0), f(1) \cdot g(1), \cdots, f(n) \cdot g(n), \cdots\cdots$$

所确定;

(4) 当 $y \neq 0$ 时，$x \div y$ 为基本序列:

$$f(0)/g(0), f(1)/g(1), \cdots, f(n)/g(n), \cdots$$

所确定(总可取对于 $m \in \omega$,使得 $m \leqslant n$ 时，有 $g(n) \neq 0$,故假定 $g(n) \neq 0, m \leqslant n$).

定义 15.6 的合理性，即基本序列对四则运算的封闭性是直接被验证的，并且对于有理数的新定义和原来的定义是一致的.

定理 15.1 实数集合 $\boldsymbol{R}$ 有如下的封闭性质和次序定律.

(1) 封闭性质:

$0 \in \boldsymbol{R}$, $1 \in \boldsymbol{R}$,

如果 $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$, 则 $x + y$, $x - y$, $x \cdot y \in \boldsymbol{R}$,

并且当 $y \neq 0$ 时，$\frac{1}{y} \in \boldsymbol{R}$,

(2) 交换律,若 $x, y \in \boldsymbol{R}$, 则

$$x + y = y + x, \quad x \cdot y = y \cdot x,$$

(3) 结合律,若 $x, y, z \in \boldsymbol{R}$, 则

$$x + (y + z) = (x + y) + z,$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

(4) 分配律,若 $x, y, z \in \boldsymbol{R}$, 则

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$$

(5) 恒等律，$x \in \boldsymbol{R}$, 则

$$x + 0 = x, \ 1 \cdot x = x,$$

(6) 逆元律: $x \in \boldsymbol{R}$, 有

$x + (-x) = 0$ 若 $x \neq 0$ 时,则 $x \cdot \frac{1}{x} = 1$,

(7) $0<1$,

(8) 若 $x, y, z \in \boldsymbol{R}$ 并且 $x<y$, 则 $x+z<y+z$,

(9) 若 $x, y, z \in \boldsymbol{R}$, 并且 $x<y, 0<z$, 则

$x \cdot z<y \cdot z$.

定理 15.1 的证明不难但比较烦琐,这里从略。

§4 实数的完备性定理

定义 15.7 对于任意的 $a, b \in \boldsymbol{R}$ 且 $a<b$, 集合:

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b \wedge x \in \boldsymbol{R}\}$$

为一区间,更确切地说,为一闭区间,并且记做 $[a, b]$, 称集合

$$\{x \mid a<x<b \wedge x \in \boldsymbol{R}\}$$

为一开区间,并记做 (a, b), 类似地还有: $(a, b]$ 和 $[a, b)$, 并称 a, b 为这些区间的端点,更确切地说, a 叫做左端点, b 叫做右端点。

定义 15.8 对于任意的集合 $S \subset \boldsymbol{R}$, 任意的实数 $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$, 如果有 $\forall x \in S(x<b)$. 我们称 b 为 S 的上界. 如果我们有 $\forall x \in S(a<x)$. 我们称 a 为 S 的下界.

定义 15.9 对于任意的集合 $S \subset \boldsymbol{R}$,和任意的实数 $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$, 如果我们有:

$$\forall x \in S(x \leqslant b) \wedge \forall \varepsilon(0<\varepsilon \rightarrow \exists x \in S(b-\varepsilon<x)),$$

我们称 b 为 S 的上确界。

如果我们有:

$$\forall x \in S(a \leqslant x) \wedge \forall \varepsilon(0 < \varepsilon \to \exists x \in S(x < a + \varepsilon)),$$

我们称 a 为 S 的下确界.

由定义 15.9，一集合 S 如果有上确界，则它是唯一的，同时下确界也是唯一的.

例 4 令

$$S:=\{x \mid 0 < x \wedge x \in \boldsymbol{Q} \wedge x^2 < 2\},$$

不难验证 S 的下确界为 0，上确界为 $\sqrt{2}$.

例 5 区间 $(0, 1)$ 的下确界为 0，上确界为 1.

例 6 闭区间 $[0, 1]$ 的下确界为 0，上确界为 1.

由上述例子知道，一般来说，一集合 S 的上确界或下确界可以属于集合 S，也可以不属于集合 S.

定理 15.2 如果 $S \subset \boldsymbol{R}$，且 S 不空有界，则有一 S 的上确界.

证明 因为 $S \neq \varnothing$，不妨设 $a \in S$，做区间 $[a, b]$，b 为 S 的上界，$a<b$. 一个闭区间叫做(相对于集合 S)是正规的，如果它与 S 是相交的，即它们的交是不空的. 不难看出，把一正规区间分成两个区间 $\left[a, \frac{b-a}{2}\right]$，$\left[\frac{b-a}{2}, b\right]$ 时，必有一个是正规的. 于是令 $\Delta_0:=[a, b]$，把 Δ_0 按上述方式分割为两个区间时，在右边的那个小区间是正规时，我们就取它为 Δ_1，否则就令左边的为 Δ_1，以此方式. 我们获得正规区间

$$\Delta_n, \Delta_{n+1}, \cdots,$$

并且分别把这些小区间的左端点记做：

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \tag{15.11}$$

显然，(15.11) 是一基本序列，并令它定义实数 r，不难验证，r 是 S 的一上确界。

因为，首先不可能再含有大于 r 的 S 的数了. 假定不然，设 $r_1 \in S$, $r < r_1$, 则对于任意 n, Δ_n 都含有 r, r_1, 但是 $r_1 \neq r$, 且 $0 < r_1 - r$, 而 Δ_n 在上述取法的过程中，总是可以比 $r_1 - r$ 短，这就产生了矛盾，所以 r 是 S 的上界.

其次，对于任意的 $0 < \varepsilon$，则对于充分大的整数 n，可以使 Δ_n 的长度小于 ε，所以 Δ_n 内的一切点都大于 $r - \varepsilon$，又由于 Δ_n 的正规性，Δ_n 中有 S 的点 x，使得 $r - \varepsilon < x$. 即 r 是 S 的上确界。

类似地，我们能够获得下述定理 15.3.

定理 15.3 如果 $S \subset \mathbf{R}$，S 不空，且 S 有一下界 a，则在 R 中有一 S 的下确界。

思考问题：定理 15.2 的证明中需要什么逻辑原则? 需要 AC 吗?

定义 15.10 令 $\langle S, <\rangle$ 是线序集合，一空隙是指满足下面的集合对 $\langle A, B\rangle$:

(1) A 与 B 是 S 的不交子集合，并且 $A \cup B = S$,

(2) 若 $a \in A$, $b \in B$, 则 $a < b$,

(3) A 没有最大的元并且 B 没有最小的元.

例如，对于有理数集合 $\mathbf{Q}$ 来说，我们可以令：

$$S_1 := \{x \mid 0 < x \wedge x \in \mathbf{Q} \wedge 2 < x^2\},$$

$$S_2 := \mathbf{Q} - S_1.$$

对上述的集合 S_1 与 S_2 而言，这时显然 $\langle S_1, S_2\rangle$ 是一空隙.

为了显明，也说$\sqrt{2}$就是$\langle S_2, S_1\rangle$的一个空隙。

由上述定义 15.10 和定理 15.2、15.3，我们立即可推得下述推论。

推论 15.1 有序集合$\langle \boldsymbol{R}, <\rangle$是没有空隙的。

定义 15.11 令$\langle S, <\rangle$是一稠密的线序集合。如果S的每一个不空有界子集合A，都在S中有上确界。那么我们称S是完备的。

注意，$\langle S, <\rangle$是完备的，恰好它是没有任何空隙的。因此我们有：

推论 15.2 有序集合$\langle \boldsymbol{R}, <\rangle$是完备的。

习　　题

1. 证明引理 15.5.
2. 证明引理 15.7.
3. 证明定理 15.1(1).
4. 证明定理 15.1(2).
5. 证明定理 15.1(3).
6. 证明定理 15.1(4).
7. 证明定理 15.1(5).
8. 证明定理 15.1(6).
9. 证明定理 15.1(9).
10. 证明$\boldsymbol{R}$中无最小元，也无最大元，也就是说，$\boldsymbol{R}$是没有端点的.
11. 证明$\langle \boldsymbol{R}, <\rangle$是$\langle \boldsymbol{Q}, <\rangle$唯一的（在同构意义下）完备的扩充.
12. 证明定理 15.3.

第十六章　序数与超穷归纳法

本章讨论序数. 序数概念极为重要，可以说序数是集合论世界的脊梁骨. 什么是序数呢? 在第五章中我们讨论过自然数，序数是自然数的推广，而自然数就是有穷序数.

§1　序数的定义

序数是自然数的推广，我们的第一个目标是把 ω 作为第一个超穷序数添加到扩大的系统中，ω 有许多性质，但是，从序数的角度看，我们需要注意 $\in$ 连接和无极大元的性质，即

$$\forall x \in \omega \forall y \in \omega (x \in y \lor x = y \lor y \in x),$$

$$\forall x \in \omega \exists y \in \omega (x \in y).$$

我们把这两条性质作为用较小序数的集合定义一个新的更大的序数的手段.

定义 16.1

(1) 自然数 0 是一序数，

(2) 若 α 是一序数，则 α^+ 也是一序数，

(3) 若 S 是序数的 $\in$ 连接的无极大元的一集合，则 $\bigcup S$ 也是一序数.

序数都是由上述条件(1)—(3)获得的.

定理 16.1 每一自然数都是一序数.

证明 由(1),0是序数.现在假定对于任意的自然数 K,K是序数,由(2),$K+1$ 也是一序数. 因此,使用数学归纳法,我们就获得了对于一切自然数 n,它都是一序数,这就完成了定理 16.1 的证明.

定理 16.2 ω是一序数.

证明 由第五章,我们知道,ω是由所有自然数组成的集合,使用定理 16.1,ω是一序数集合,并且ω是$\in$连接的,无极大元的. 再依据定义 16.1(3),可知$\bigcup\omega$是一序数. 因此仅须证明 $\omega=\bigcup\omega$,就完成了定理 16.2 的证明,而这是因为,对于任意集合 x,都有

$$x\in\bigcup\omega\longleftrightarrow x\in y\wedge y\in\omega \qquad \text{(有一集合 } y\text{)}$$

$$\longleftrightarrow x\in\omega. \qquad \text{(由 } \omega \text{ 的传递性)}$$

所以,由外延公理,有$\omega=\bigcup\omega$.

定义 16.2 我们令 $\omega+0:=\omega$ 且 $\omega+1:=\omega^+$, $\omega+2:=(\omega+1)^+$, 对于任一 $n\in\omega$, $\omega+(n+1):=(\omega+n)^+$.

推论 16.1 ω^+ 是一序数,并且对于任一自然数 n, $\omega+n$ 是一序数.

由定理 16.2 和定义 16.1、16.2,上述推论是显然的.

定义 16.3 令

$$S_0:=\{x\mid\exists n(n\in\omega\wedge x=\omega+n)\},$$

即

$$S_0=\{\omega,\omega+1,\omega+2,\cdots,\omega+n,\cdots\cdots\}.$$

定理 16.3 $\omega+\omega:=\bigcup S_0$ 是一序数.

证明 由替换公理，可知 S_0 是一集合，并且由推论 16.1，S_0 是一序数的集合，而且显然 S_0 是 $\in$ 连接的无极大元的序数集合，因此，由定义 16.1(3) $\omega+\omega$ 是一序数。

定理 16.4

(1) 对于任意的自然数 n，都有 $n\in\omega+\omega$，

(2) 对于任意的自然数 n，都有 $\omega+n\in\omega+\omega$，

(3) $\omega+\omega$ 是满足上述(1)与(2)的最小的序数。这里所谓最小的序数是指：若 α 是任意一序数，并且也满足上述条件(1)与(2)，则有 $\omega+\omega\subset\alpha$。

证明 首先证明上述定义的集合 S_0 的元素 $\omega+n$ 都是传递的，我们可施归纳于自然数 n 来完成这一证明。由定理 5.4，ω 是传递的。即 $n=0$ 时，$\omega+0$ 是传递的，现在假定，对于任一自然数 K，$\omega+K$ 是传递的，由第七章的习题 4，可知 $(\omega+K)^+$ (即 $\omega+(K+1)$) 也是传递的。由此，使用定理 7.9，可知 $\omega+\omega$ (亦即 $\bigcup S_0$) 是传递的。又因为 $\omega\in S_0$，并且，对于任意的自然数 n，都有 $\omega+(n+1)\in S_0$，所以，(1)，(2)成立。

现在来证明(3)，即令序数 α 满足(1)，(2)，我们证明 $\omega+\omega\subset\alpha$。对于任意的集合 x，若 $x\in\bigcup S_0$，就有 $n\in\omega$，使得 $x\in\omega+n$。这时，必有

(4) $x\in\omega$，

(5) 有一自然数 $K<n$，$x=\omega+K$，二者之一成立。若(4)成立，由于 α 满足条件(1)，故 $x\in\alpha$。若(5)成立，由 α 满足条件(2)，故 $x\in\alpha$。所以，我们总是有 $x\in\alpha$。因此，$\bigcup S_0\subset\alpha$，

即 $\omega+\omega\subset\alpha$. 所以,欲证结果成立.

定理 16.4 说明了序数 $\omega+\omega$ 是大于 S_0 中元素的最小序数. 也就是说,我们有

$$\begin{aligned}\omega+\omega &= \omega\cup S_0\\ &= \omega\cup\{\omega+n\mid n\in\omega\}\\ &= \{0,1,2,\cdots\cdots,\omega,\omega+1,\\ &\quad\ \omega+2,\cdots\cdots\}.\end{aligned}$$

并且,我们令

$$\omega\cdot 2:=\omega+\omega.$$

这样,我们可以有序数 $(\omega\cdot 2)+1:=(\omega\cdot 2)^+$. 并且我们令 $(\omega\cdot 2)+0=\omega\cdot 2$, 对于所有的自然数 n, 我们都有序数 $(\omega\cdot 2)+(n+1):=((\omega\cdot 2)+n)^+$. 这样,我们有序数 $(\omega\cdot 2)+1$, $(\omega\cdot 2)+2$, $\cdots\cdots$. 类似于定义 16.3, 我们有序数 $(\omega\cdot 2)+\omega$, 即有序数 $\omega+\omega+\omega$. 并且令

$$\omega\cdot 3:=\omega+\omega+\omega.$$

按照上述过程,对于任意的自然数 n, 假定我们已经有数 $\omega\cdot n$, 我们就一定有序数

$$(\omega\cdot n)+1,(\omega\cdot n)+2,\cdots\cdots,$$

并且类似于定理 16.3, 我们可以获得序数 $\omega\cdot(n+1)$ 等等. 这样,我们可以令

$$S_1:=\{\omega\cdot n\mid n\in\omega\}.$$

由此,可得序数 $\omega\cdot\omega:=\bigcup S_1$. 不难验证序数 $\omega\cdot\omega$ 是大于形式为 $(\omega\cdot n)+m$ 的序数的最小序数,其中 n,m 为任

意的自然数．产生新的序数的过程是没有止境的．今后，我们常用 α, β 等等表示序数．

§2 序数的性质

定义 16.4 对于一序数 α 如果存在一个序数 β，使得

$$\alpha = \beta + 1$$

成立，则称 α 为一后继序数．例如 $1, 2, \omega + 1, \omega + 2$ 等等都是后继序数．不是 0 也不是后继序数的序数叫做极限序数．当 α 为一极限序数时，就记做 $\lim(\alpha)$．例如 $\omega, \omega \cdot 2, \omega \cdot \omega$ 等等都是极限序数．由定义 16.1(1) 获得的序数是 0，由(2)获得的是后继序数，由(3)获得的序数为极限序数．

定理 16.5 任一序数 α 都是传递的．

证明 因为序数 0 是传递的，并且若序数 β 是传递的，由第七章的习题 4，则 β^+ 也是传递的．若 S 是一已知的序数集合，由假定 S 的每一元都是传递的，由定理 7.9，则序数 $\bigcup S$ 是传递的．因此，由定义 16.1 就获得了一切序数都是传递的．

定理 16.6 任一序数 α 是 $\in$ 连接的，即

$$\forall x \in \alpha \forall y \in \alpha (x \in y \vee x = y \vee y \in x).$$

证明 施归于序数的构造，由定义 16.1，首先 $\alpha = 0$ 时显然成立．其次若有序数 β，使得 $\alpha = \beta + 1$，当 β 满足定理的结果时，则 α 显然也满足．因为 $x \in \alpha, y \in \alpha$ 所以有

$$x \in \beta \vee x = \beta$$

$$y \in \beta \vee y = \beta$$

成立．若 $x\in\beta$ 且 $y\in\beta$，由假定可得

$$x\in y\vee x=y\vee y\in x$$

成立． 若 $y\in\beta$ 且 $x=\beta$，这时有 $y\in x$，则此时定理也成立．若 $x\in\beta$ 且 $y=\beta$，则有 $x\in y$ 亦获得欲证结果． 若 $x=\beta$ 且 $y=\beta$，这时有 $x=y$，亦有欲证结果成立．

其三，假定 S 为满足定义 16.1(3) 前提的序数集合，欲证 $\bigcup S$ 也 $\in$ 连接的．

因为若 $x\in\bigcup S$，$y\in\bigcup S$，则有

$$\alpha\in S \quad 且 \quad x\in\alpha,$$

$$\beta\in S \quad 且 \quad y\in\beta.$$

又因为我们有

$$\alpha\in\beta\vee\alpha=\beta\vee\beta\in\alpha,$$

所以，当 $\alpha\in\beta$ 时，则有 $x\in\beta$，$y\in\beta$，所以有

$$x\in y\vee x=y\vee y\in x.$$

同样，对于 $\alpha=\beta$ 和 $\beta\in\alpha$，都有欲证结果成立．

综上，我们完成了定理 16.6 的证明．

推论 16.2 任一序数 α 都有三岐性． 也就是说，对于所有的 $x\in\alpha$，$y\in\alpha$，下述三者

$$x\in y,\quad x=y,\quad y\in x$$

恰好有一个成立．

证明 由定理 16.6 和正则公理，这一推论的证明是显然的．

我们重申序数集合的极大元的概念．令 S 为序数的一集合，如果一序数 β，使得 $\beta\in S$ 且对于所有的序数 α，当 $\alpha\neq\beta$

时都有

$$\alpha \in S \to \alpha \in \beta.$$

则称 S 为有极大元的.

当 S 没有极大元时，我们称它是无极大元的，也就是说，对于任意的 $\beta \in S$，都有 $\alpha \in S$ 使得 $\beta \in \alpha$ 成立.

例 1 任意自然数都是有极大元的序数集合. $\{2, 3\}$, $\{4, 6\}$, $\{8\}$, $\{\omega\}$, $\{\omega, \omega+1\}$, $\omega+1$, $\omega+10$ 等等，也都有极大元的序数集合，它们的极大元分别为 3、6、8、ω、$\omega+1$、ω、$\omega+9$.

例 2 令

$$S_1 = \{n \mid \exists m(m \in \omega \wedge n = 2m)\},$$

$$S_2 = \{n \mid \exists m(m \in \omega \wedge n = 2m+1)\}.$$

不难验证上述定义的 S_1, S_2 与 $\omega, \omega+\omega$ 等等都是无极大元的序数集合.

定理 16.7 对于任意的序数集合 S，若 β_1，β_2 都是 S 的极大元，则 $\beta_1 = \beta_2$.

证明 假定 $\beta_1 \neq \beta_2$，这时由于 β_1，β_2 都是 S 的极大元，因此，有 $\beta_1 \in \beta_2$ 且 $\beta_2 \in \beta_1$ 同时成立. 由正则公理这是不可能的，因此，有 $\beta_1 = \beta_2$.

上述定理是说，任一序数集合 S，若 S 有极大元，则它的极大元是唯一的. 因此，我们可以把 S 中的极大元称为 S 的最大元.

定理 16.8 对于任意的序数 α, β，若 $\alpha \subset_+ \beta$，则 $\alpha \in \beta$.

证明 由 $\alpha \subset_+ \beta$，所以 $\beta \dot{-} \alpha$ 不空，令 x 为 $\beta \dot{-} \alpha$ 的极小

元，即 $x \in \beta \dot{-} \alpha$ 且 $x \cap (\beta \dot{-} \alpha) = \varnothing$. 现在验证 $x = \alpha$，即 $\alpha \in \beta$.

(1) $x \subset \alpha$. 若不然，即有 y 使得 $y \in x \wedge y \notin \alpha$，但是 $x \in \beta \dot{-} \alpha$，所以 $x \in \beta$ 且 $x \notin \alpha$. 因此，$y \in \beta$，$y \in (\beta \dot{-} \alpha)$. 这样，就有 $y \in (x \cap (\beta \dot{-} \alpha))$，这与 x 的取法相矛盾. 所以，我们有欲证结果 $x \subset \alpha$ 成立.

(2) $\alpha \subset x$，因为对于任一集合 y，若 $y \in \alpha$，由前提，就有 $y \in \beta$. 这样，我们已有 $x \in \beta$，$y \in \beta$. 由定理 16.6，我们有

$$x \in y \vee x = y \vee y \in x.$$

若 $x \in y$，由 $y \in \alpha$，即得 $x \in \alpha$，这与 x 的取法相矛盾，故不可能有 $x \in y$. 若 $x = y$，$y \in \alpha$，则有 $x \in \alpha$，这也与 x 的取法矛盾. 因此，只能有 $y \in x$ 成立. 即，我们获得：对于任一 y，$y \in \alpha \rightarrow y \in x$，故 $\alpha \subset x$ 成立.

由(1)与(2)，即得 $x = \alpha$，即 $\alpha \in \beta$.

定理 16.9 设 $A(x)$ 为任一公式，如果有一序数 α，使得 $A(\alpha)$ 成立，则有一序数 α_0，使得 $A(\alpha_0)$ 成立，并且对于所有的序数 β，若 $\beta \in \alpha_0$，则 $A(\beta)$ 不成立.

证明 由题设，令

$$S := \{\beta \mid \beta \in \alpha^+ \wedge A(\beta)\}.$$

由分离公理 S 为一序数集合，并且 $\alpha \in S$，所以 $S \neq \varnothing$. 由正则公理，有一序数 $\alpha_0 \in S$，且 $\alpha_0 \cap S = \varnothing$. 也就是说，对于序数 α_0，我们有 $A(\alpha_0)$ 成立，并且对于所有 β，$\beta \in \alpha_0$，$\beta \notin S$，即 $A(\beta)$ 不成立.

定理 16.10 如果 S 是一序数集合，则 S 是 $\in$ 连接的.

证明 令

$$B(x, y):= x\in y\vee x=y\vee y\in x.$$

我们希望证明 $\forall x\in S\forall y\in SB(x, y)$. 假定不然,就有

$$\exists x\in S\exists y\in S\neg B(x, y). \qquad (16.1)$$

令 $\beta_1:=\{x|x\in S\wedge\exists y\in S\neg B(x, y)\}$.

由(16.1), $B_1\neq\varnothing$, 由正则公理, 就有一 x_0, 使得 x_0 是 β_1 的一极小元. 并且由(16.1),我们有

$$\beta_2:=\{y|y\in S\wedge\neg B(x_0, y)\}$$

不空,令 y_0 为 β_2 的一极小元,所以有

$$\neg B(x_0, y_0) \qquad (16.2)$$

成立,并且 $x_0\in S$, $y_0\in S$. 我们来证明:

(1) $x_0\subset y_0$. 因为任一 z, $z\in x_0$. 由于 x_0 的取法, 就有 $B(z, y_0)$, 即 $z\in y_0\vee z=y_0\vee y_0\in z$, 我们应当有 $z\in y_0$. 因为若不然,就有 $z=y_0\vee y_0\in z$, 由 $z=y_0$, 即得 $y_0\in x_0$, 而由 $y_0\in z$,及 $z\in x_0$ 和 x_0 的传递性,也获得 $y_0\in x_0$ 而这均与(16.2)相矛盾. 这样,我们就有 $\forall z(z\in x_0\rightarrow z\in y_0)$, 即 $x_0\subset y_0$.

(2) $y_0\subset x_0$. 设 $z\in y_0$,由 y_0 的取法,我们就有 $B(x_0 z)$ 成立. 亦即

$$x_0\in z\vee x_0=z\vee z\in x_0.$$

假定 $x_0\in z$, 由 $z\in y_0$ 及 y_0 的传递性,就有 $x_0\in y_0$, 这样,就有 $B(x_0, y_0)$, 与(16.2)矛盾. 因此,不可能有 $x_0\in z$ 成立.

假定 $x_0=z$, 这时由 $z\in y_0$, 就有 $x_0\in y_0$, 也就有 $B(x_0, y_0)$ 成立. 这与(16.2)矛盾. 因此,不能有 $x_0=z$ 成立.

由 $B(x_0, z)$ 成立,必然获得 $z\in x_0$.

综上所述，我们有 $\forall z(z\in y_0\to z\in x_0)$，即有 $y_0\subset x_0$。

由(1)与(2)，有 $x_0=y_0$，即，获得了 $B(x_0, y_0)$ 成立，这与(16.2)相矛盾，因此，我们获得(16.1)是不可能的，即，我们有

$$\forall x\in S\forall y\in SB(x, y).$$

定义 16.5 令 S 为序数的任一给定集合，我们用符号 SUPS 表示一最小的序数 α，使得

$$\forall\beta(\beta\in S\to\beta\in\alpha).$$

并且称这一最小的序数 α (即 SUPS) 为 S 的最小上界。

定理 16.11 对于任意的序数集合 S，都有它的最小上界 SUPS。

证明 当 S 中存在一最大序数 β 时，由定义 16.1，$\beta+1$ 是一序数，我们令 $\alpha=\beta+1$。显然，这时 α 就是 S 的最小上界，故 SUPS $=\beta+1$。

当 S 中无最大序数时，由定义 16.1 和定理 16.10，可知 $\bigcup S$ 是一序数。我们令 $\alpha=\bigcup S$，并且对于任意的序数 β，我们有 $\beta\in S$，并且由于 β 不是 S 的最大元，故有 $\beta_1\in S$ 且 $\beta\in\beta_1$，所以，由 $\bigcup S$ 的定义，就有 $\beta\in\bigcup S$。$\bigcup S$ 的最小性质是显然的。

§3 超穷归纳法

由定义 16.1 和 §1 构造序数的过程，读者容易看出，序数是由 0 出发，并经过后继运算和并集合运算逐步由小到大构

造起来的，这种构造过程是永远没有完结的．我们把所有的序数所形成的类记做 O_n． O_n 不是一序数，也不是一集合．

定义 16.6 对于任意的序数 α, β，我们令

$$\alpha < \beta :=\alpha \in \beta,$$

$$\alpha \leqslant \beta :=\alpha < \beta \vee \alpha = \beta.$$

定理 16.12 （超穷归纳法）对于任意的公式 $A(x)$，我们有

$$\text{I}\quad A(0) \wedge \forall\alpha(A(\alpha) \to A(\alpha^+) \wedge \forall\alpha(\lim(\alpha) \wedge \forall\beta \in \alpha A(\beta) \to A(\alpha))) \to \forall\alpha A(\alpha).$$

$$\text{II}\quad \forall\alpha(\forall\beta \in \alpha A(\beta) \to A(\alpha)) \to \forall\alpha A(\alpha).$$

形式 I 与 II 实质上是等价的． I 是说，由 $A(0)$ 成立，并且对于任意的后继序数 α^+，$A(\alpha^+)$ 可由 $A(\alpha)$ 推出；并且对于任意的极限序数 α 而言，由小于 α 的一切 β 命题 $A(\beta)$ 成立，推导出 $A(\alpha)$ 也成立，这时我们就能够获得对一切序数 α 而言，都有 $A(\alpha)$ 成立．

II 是说，对于每一序数 α 而言，若可以由小于 α 的一切 β 都有 $A(\beta)$ 成立，就能推导出 α 时，$A(\alpha)$ 成立．这时，我们就获得了对于一切 α 而言，$A(\alpha)$ 成立，这里当然包括 $A(0)$ 成立，因为没有序数小于 0，因此可以认为

$$\alpha < 0 \to A(\alpha) \tag{16.3}$$

成立．这是由于它的前提“$\alpha < 0$”是假的，故(16.3)是真的．所以由 II，$A(0)$ 真． 形式 I 的前提比形式 II 的前提陈述得更细更具体一些．我们仅须证明形式 II．

证明 假定定理 16.14(II) 不成立，即有序数 α，使得 $\neg A(\alpha)$ 成立．由定理 16.9 就有最小的序数 α_0，使得 $\neg A(\alpha_0)$ 成立．因此，当 $\beta < \alpha_0$ 时，都有 $A(\beta)$ 成立． 这样，由归纳前提，即可得到 $A(\alpha_0)$ 成立． 这就产生了一个矛盾． 说明不可能有一 α 使得 $\neg A(\alpha)$ 成立．也就是说，对一切序数 α，都有 $A(\alpha)$ 成立．

习　　题

1．证明：0是最小的序数．

2．证明：对于任意的序数 α，不存在序数 β，使得 $\alpha < \beta < \alpha + 1$．

3．证明：ω 为最小的无穷序数．

4．证明：若 α，β 为任意的二个序数，则 $\alpha \cap \beta$ 是一序数．

5．设 α 是一序数，且 $x \in \alpha$，证明 x 也是一序数．

6．设 S 为任一序数集合，证明 S 关于 $\in$ 有三岐性质．

7．证明：一序数 α 是一自然数，当且仅当 α 的每一不空子集合都有一个最大元素．

8．当 α 是一非零序数时，证明：α 是一极限序数，当且仅当

$$\bigcup \alpha = \alpha.$$

9．证明：对于任意的序数 α，都有

$$\bigcup \alpha^{+} = \alpha.$$

10．证明：若 α 和 β 都是序数，且 $\beta < \alpha$，则 $\beta \leqslant \bigcup \alpha$．

第十七章　集合的势

§1　基本概念

定义 17.1　一集合 S，如果有一个自然数 n，以及 n 与 S 之间的一个双射函数 f．也就是说 S 恰有 n 个元素，则集合 S 叫做有穷的．

例如：

（1）空集合是有穷集合．任一自然数都是一有穷集合．

（2）下列集合都是有穷集合：

a. $\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\{\{\varnothing\}\}\},\varnothing\}$，

b. $\{x|x$ 是由英文字母组成的符号串(或称字)，其长度(即符号的个数)小于 $1000\}$，

c. $\{x|x<2^{20000}$ 并且 x 是一素数$\}$．

一集合是有穷的，即它的元素个数有穷，并不要求去找出这一集合元素的具体数目．比如 (2) c. 所刻划的集合究竟是多少个元素呢？其中包含着大量的计算问题．但是不管如何枚举它的元素，也不管它的元素的确切个数，我们可看出它的个数一定小于 2^{20000}，因此可以断定它是一有穷集合．

定义 17.2　一集合 S 若不是有穷集合，就称为无穷集合．也就是说，对于一集合 S，如找不到一个自然数 n，使得 S 恰

好是 n 个元素，就称 S 是无穷集合.

例 (1) 自然数集合 ω 是一无穷集合，

(2) 若 α 为一序数且 $\omega \leqslant \alpha$，则 α 是一无穷集合，

(3) 平面上所有的整数格子点是一无穷集合，如图 1，其中

$$n_1 \in z, \quad n_2 \in z.$$

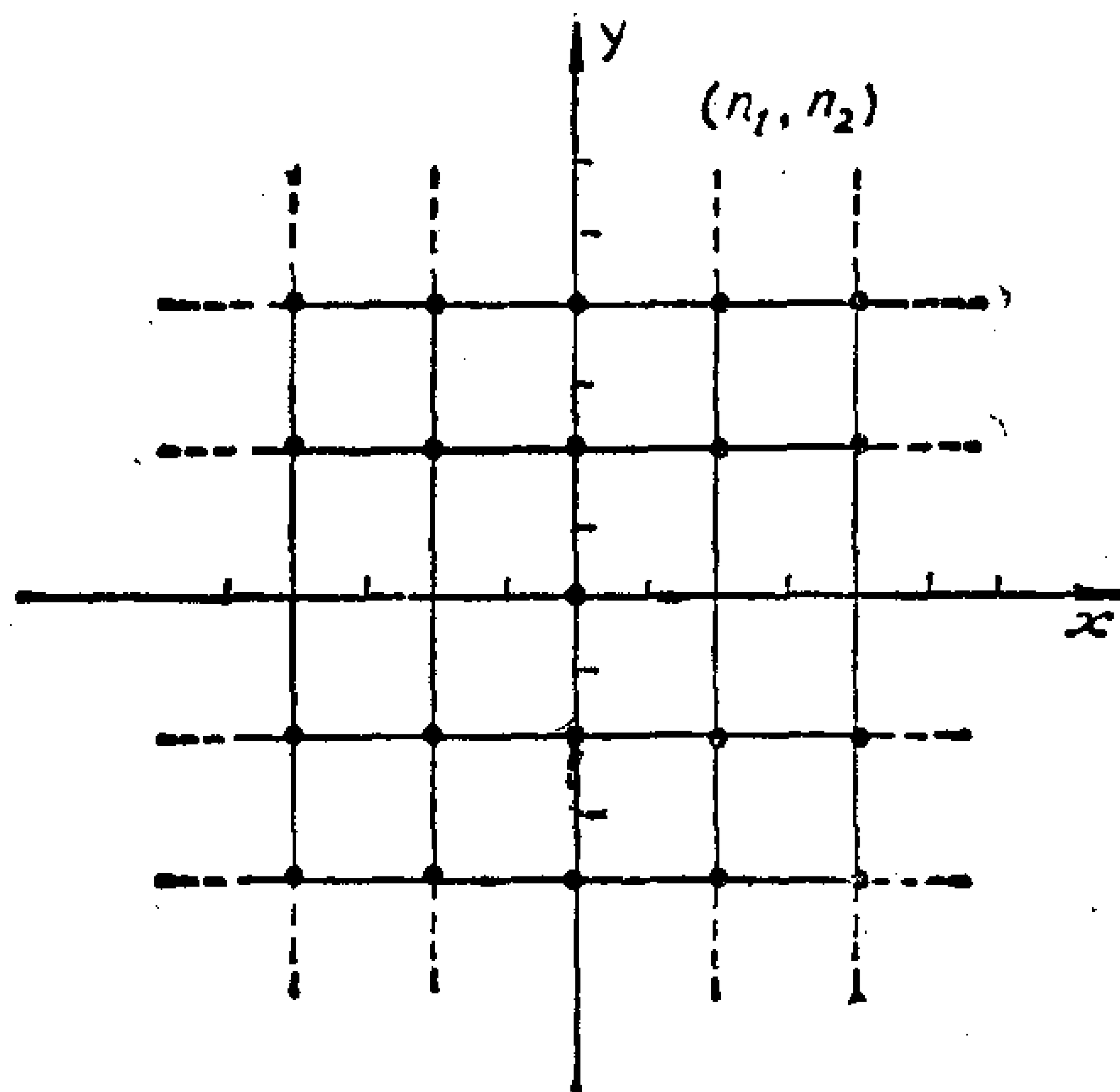


图 1 平面上整数格子点集合是一无穷集合

问题是对于任意二个无穷集合 S_1，S_2，是否还能比较它们大小呢？ 早在 1638 年，天文学家伽利略发现在一定意义下，正整数的平方数集合 S_1

$$\{1, 4, 9, 16, \cdots\}$$

和正整数集合 S_2

$$\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

是一样多的. 因为，任给一个正整数 n，都有唯一的一个平方

数与之对应，即若 $n \in S_2$，则必有 $n^2 \in S_1$，这说明 S_1 与 S_2 的数目应当相等；但是，另一方面，$S_1 \subset S_2$，并且 S_1 是 S_2 的真子集合，S_1 是 S_2 的一部分，这一问题引起了伽利略和他的同时代人的困惑．康托尔系统地研究了两个无穷集合数目相等的特征，提出了一一对应的概念，把两个集合能否建立一一对应作为它们的数目是否相同的标准．

定义 17.3 对任意的集合 S_1 与 S_2，如果有一个 S_1 与 S_2 的双射函数，我们把集合 S_1 与 S_2 叫做有相同基数（或称等势），记做 $\bar{\bar{S}}_1 = \bar{\bar{S}}_2$．

由定义 17.3 我们知道正整数平方数集合与正整数集合有相同的基数．

二集合 x_1, x_2 等势，记作 $EP(x_1, x_2)$．即 $EP(x_1, x_2)$ 就是 $\bar{\bar{x}}_1 = \bar{\bar{x}}_2$．

引理 17.1 关系 EP 是类上的一个等价关系，即：

(1) $\forall x EP(x, x)$,

(2) $\forall x \forall y \forall z (EP(x, y) \wedge EP(y, z) \rightarrow EP(x, z))$,

(3) $\forall x \forall y (EP(x, y) \rightarrow EP(y, x))$.

由双射函数的概念，引理 17.1 是显然的．因为 EP 是类的一等价关系，并且 $EP \subset V \times V$，这样，我们按关系 EP 把 V 作等价类的划分了，我们令

$$Ca := V/EP, \tag{17.1}$$

为了醒目，人们把集合 S 的势即基数记作 $\bar{\bar{S}}$，它也可表示与同势的那些集合形成的等价类，即 Ca 的元（这里用到的关系，等价类划分等概念已推广到类上）．

§2 康托尔-伯恩斯坦定理

定义 17.4 对于任意集合 S_1, S_2, 我们定义 $\bar{\bar{S}}_1 \leqslant \bar{\bar{S}}_2$, 如果存在一个 S_1 到 S_2 的内射函数 f, 即 f 是一个一对一的函数，其定义域为 S_1, 其值域在 S_2 之中，任一 $x \in S_1$, 都有 $f(x) \in S_2$.

定义 17.5 对于任意的集合 S_1, S_2, 我们定义：

$$\bar{\bar{S}}_1 < \bar{\bar{S}}_2 \text{ 当且仅当 } \bar{\bar{S}}_1 \leqslant \bar{\bar{S}}_2 \text{ 且 } \bar{\bar{S}}_1 \neq \bar{\bar{S}}_2. \qquad (17.1)$$

其中，$\bar{\bar{S}}_1 \neq \bar{\bar{S}}_2$ 是指 S_1 与 S_2 之间不存在一个双射函数. 现在我们陈述并证明康托尔-伯恩斯坦(Bernstein)定理. 初学者也可暂时略去定理的证明.

定理 17.1 对于任意的集合 S_1, S_2 若 $\bar{\bar{S}}_1 \leqslant \bar{\bar{S}}_2$ 且 $\bar{\bar{S}}_2 \leqslant \bar{\bar{S}}_1$, 则 $\bar{\bar{S}}_1 = \bar{\bar{S}}_2$.

证明 设 f 为 S_1 到 S_2 的一内射函数，g 为 S_2 到 S_1 的一内射函数. 不失一般性，可假定 $S_1 \cap S_2 = \varnothing$.

容易看出，$S_1 \cup S_2$ 是具有下述形式的所有序列.

$$S := \{\cdots\cdots, x_n, y_n, \cdots\cdots\} \quad n \in Z$$

的不交并，$x_n \in S_1$, $y_n \in S_2$, $n \in Z$, $f(x_n) = y_n$, $g(y_n) = x_{n+1}$, 并且若 x_n 在 g 的值域中，那么在序列中就有 y_{n-1} 出现. 当然，如图 2 所示，若 x_n 不在 g 的值域中，就不可能有 y_{n-1} 在列中出现. 同样，若 y_n 在 f 的值域之中，那么就有 x_n 出现；当然，当 y_n 不在 f 的值域中，x_n 就不可能出现. 不难理解上述列的右边总是不中止的. 综上所述我们有三种类型的列. 我们可设想一个集合簇 K, 使得 $S \in K$ 当且仅当 S 是属于下述形式之一

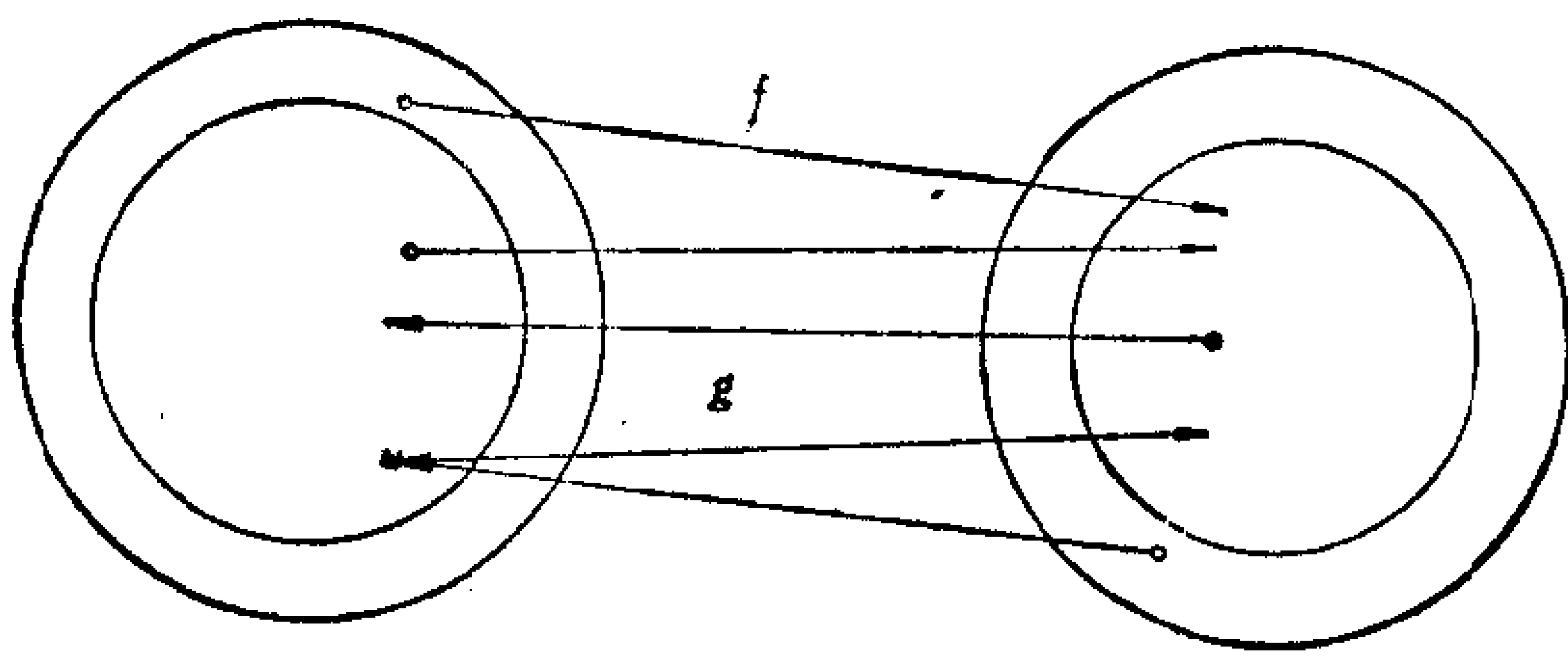


图 2　构造 S 的示意图

的列.

(1) 左边不中止,亦即

$$S:=\{\cdots\cdots, x_n, y_n, \cdots\cdots\}, \quad n\in Z,$$

这种情况的联线起点始终在 ran(g) 与 ran(f) 中摆动.

(2) 左边止于某一 x_m, 其中 m 为某一固定的整数. 即

$$S:=\{x_m, y_m, x_{m+1}, y_{m+1}, \cdots\cdots\},$$

这种情况的联线起点在 $S_1 \dot{-} \operatorname{ran}(g)$ 中.

(3) 左边中止于某一 y_m, 其中 m 为某一固定的整数, 即

$$S:=\{y_m, x_{m+1}, y_{m+1}, \cdots\cdots\}.$$

这种情况的联线起点在 $S_2 \dot{-} \operatorname{ran}(f)$ 中.

不难验证上述定义的集合簇 K 是两两不交的,并且

$$S_1\cup S_2=\bigcup K.$$

现在,我们依据上述三种不同类型的集合 S, 分别定义从 $S\cap S_1$ 到 $S\cap S_2$ 上的一一映射 φ, 即 $S\cap S_1$ 与 $S\cap S_2$ 的一双射 φ. 也就是说, 我们定义一函数簇 Φ, $\varphi\in\Phi$ 当且仅当 φ 满足下述条件之一:

(i) 对应于上述情况 (1), 也就是对于每一整数 n, 都有 x_n 与 y_n 在 S 中出现,这时我们有

$$\varphi(x_n)=y_n. \quad (n\in Z)$$

(ii) 对应于情况(2),这时也令

$$\varphi(x_n)=y_n. \quad (m\leqslant n)$$

(iii) 对应于情况(3),这时 φ 的取值情况有些特殊，我们令

$$\varphi(x_n)=y_{n-1}. \quad (m<n)$$

上述定义的这一簇函数 Φ 有这样的性质:

a. 其中任一函数 φ, 都有 $\varphi\subset S_1\times S_2$,

b. 这一簇中任取两个函数，它们都是两两不交的，即若 $\varphi_1\in\Phi$, 则 $\varphi_2\in\Phi$, 并且若 $\varphi_1\neq\varphi_2$ 则 $\varphi_1\cap\varphi_2=\varnothing$.

令

$h=\bigcup\Phi$, 容易验证 h 就是 S_1 与 S_2 的一双射函数.

定理 17.1 称之为康托尔-伯恩斯坦定理,它是关于集合的势的一条基本定理.

引理 17.2 对于任意的集合 S_1, S_2, S_3, 若 $\bar{\bar{S}}_1\leqslant\bar{\bar{S}}_2$, $\bar{\bar{S}}_2\leqslant\bar{\bar{S}}_3$ 则 $\bar{\bar{S}}_1\leqslant\bar{\bar{S}}_3$.

证明 由引理的假设,令一对一的函数为 f_1 与 f_2,

$$f_1:S_1\to S_2,$$

$$f_2:S_2\to S_3.$$

由图 3, 不难看出，我们可以构造一函数 f, 它是一对一的并且满足:

$$f:S_1\to S_3.$$

为此,当 $x\in S_1$ 时我们规定,

$$f(x)=f_2(f_1(x)),$$

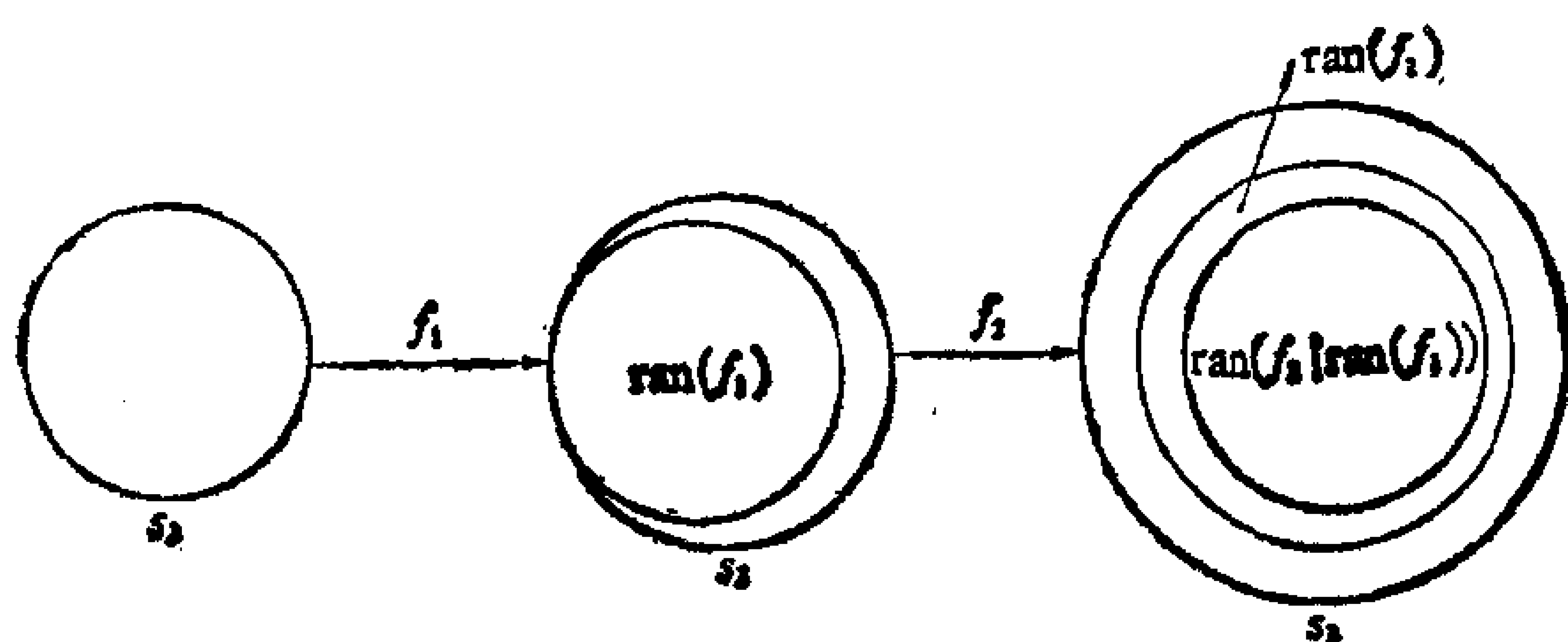


图 3　ran$(f_1)\subset S_2$ 且 ran$(f\restriction \text{ran}(f_1))\subset \text{ran}(f_2)\subsetneq S_3$

f 是一一对应的，是从 S_1 到 S_3 中的一内射，所以我们有：

$$\bar{\bar{S}}_1 \leqslant \bar{\bar{S}}_3.$$

由引理 17.1，集合的势的关系≤是自反的；由定理 17.1，集合的势的关系≤是反对称的；由引理 17.2，集合的势的关系≤是传递的．这就是说，≤是类 C_a 上一个偏序关系．

关于集合的势，康托尔还给出了一条基本原理，就是对于任意的两个集合 S_1 与 S_2，它们的势总是可比较的，即下述三式

$$\bar{\bar{S}}_1 < \bar{\bar{S}}_2, \quad \bar{\bar{S}}_1 = \bar{\bar{S}}_2, \quad \bar{\bar{S}}_2 < \bar{\bar{S}}_1$$

恰好有一个成立，这个原理与选择公理等价．

§3　可数集合

定义 17.6　对于任意的集合 S，如果存在 S 与 ω 的一双射函数 f；则我们称 S 是可数的．如果有一内射 $\varphi:\omega\to S$，并且不存在内射 $h:S\to\omega$，则 S 是不可数的．

由定义 17.6，S 是可数的，就记做 $\bar{\bar{S}}=\bar{\omega}$．人们常把可数

集合的势记作 $\aleph_0$. 它是最小的无穷势.

定理 17.2 自然数的任一无穷子集合 S 都是可数的. 也就是说,若 S 为自然数的一无穷子集合,则 $\bar{\bar{S}} = \aleph_0$.

证明 设 $a \in S$ 且是 S 的最小元. 并且令 $g(x)$ 是 S 中大于 x 的最小的元. 由递归定理我们来给出此二集合的一双射函数 f

$$\begin{cases} f(0) = a \\ f(S(n)) = g(f(n)). \end{cases} \tag{17.2}$$

由 (17.2) 及递归定理,不难验证 f 是 ω 与 S 的一双射函数.

例 1 令 $S_1 := \{1, 4, 9, 16, \cdots\}$, 即 S_1 为正整数的平方数的集合. S_1 是可数的.

例 2 令 $S_2 := \{x \mid x$ 是奇数$\}$, S_2 是可数的.

同理,偶数集合,素数集合都是可数的.

有些自然数的集合是有穷的还是无穷的,现在还不知道,甚至是著名的数学难题. 例如,令

$d_1 := \{x \mid \exists n \in \omega(x = 2^n + 1 \land x$ 是一素数$)\}$,

$d_2 := \{x \mid x \in \omega \land x$ 是一素数 $\land x + 2$ 是一素数$\}$.

在数学史上称 d_2 是有穷的还是无穷的这一问题为李生数问题.

定理 17.3 整数集合 Z 是可数的,即

$$\bar{\bar{Z}} = \aleph_0.$$

证明 把 Z 按下列顺序排列:

$$0, 1, -1, 2, -2, \cdots, n, -n, \cdots\cdots$$

显然可以看出 Z 与 ω 是一对一的.

定理 17.4 有理数集合 Q 是可数的，即

$$Q=\aleph_0.$$

证明 任一有理数 r 都有自然数 p, q（且 $q \neq 0$），使得 $r=p/q$，这样我们就可以用自然数对 $\langle p, q\rangle$ 来代表．并且如图 4 按由内向外逐一进行检查，把那些第一次出现的表示某一有理数的格子点配以一个自然数（当然要除去横坐标轴上的各点）．例如我们首先把 $\langle 0, 1\rangle$ 配之以自然数 0，然后我们以 $\langle 1, 1\rangle$ 作起点，如图 4 的方向转动，即得前边 22 个有理数，并配之以相应的自然数（表 1）．其余的可以此类推，这样就获得了定理 17.4．

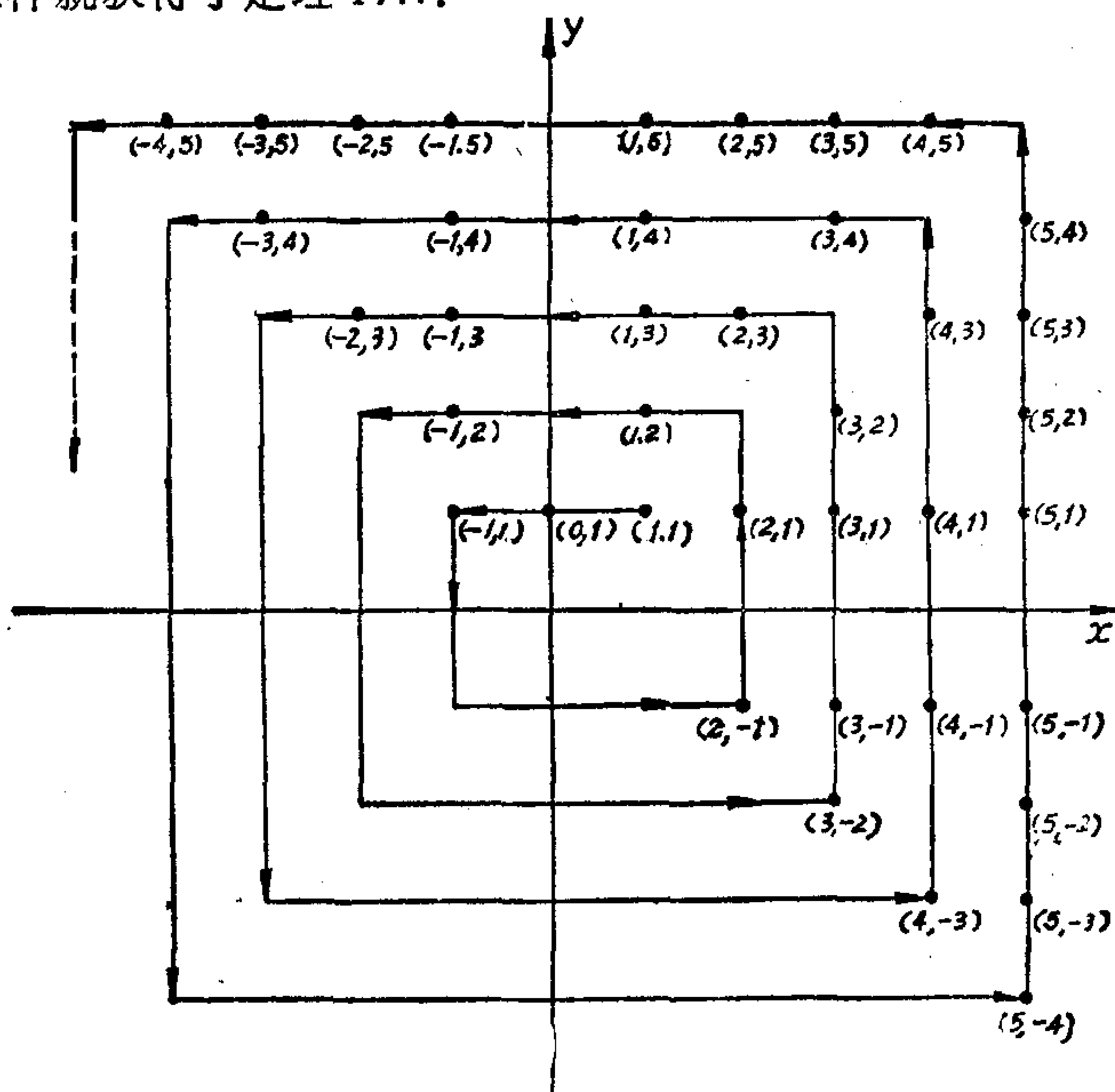


图 4 用自然数格子点表示有理数，并将以格子点表示的有理数配之以自然数

表1　有理数集合与自然数集合一一对应的对应顺序举例

格子点	有理数	相应的自然数
⟨0，1⟩	0	0
⟨1，1⟩	1	1
⟨−1，1⟩	−1	2
⟨2，−1⟩	−2	3
⟨2，1⟩	2	4
⟨1，2⟩	$\frac{1}{2}$	5
⟨−1，2⟩	$-\frac{1}{2}$	6
⟨3，−2⟩	$-\frac{3}{2}$	7
⟨3，−1⟩	−3	8
⟨3，1⟩	3	9
⟨3，2⟩	$\frac{3}{2}$	10
⟨2，3⟩	$\frac{2}{3}$	11
⟨1，3⟩	$\frac{1}{3}$	12
⟨−1，3⟩	$-\frac{1}{3}$	13
⟨−2，3⟩	$-\frac{2}{3}$	14

续表1

格 子 点	有 理 数	相应的自然数
$\langle 4, -3\rangle$	$-\frac{4}{3}$	15
$\langle 4, -1\rangle$	-4	16
$\langle 4, 1\rangle$	4	17
$\langle 4, 3\rangle$	$\frac{4}{3}$	18
$\langle 3, 4\rangle$	$\frac{3}{4}$	19
$\langle 1, 4\rangle$	$\frac{1}{4}$	20
$\langle -1, 4\rangle$	$-\frac{1}{4}$	21

定理 17.4 可能令人吃惊. 因为有理数集合当作线性序集是稠密的，而自然数集合是疏稀的，但是它们的势却相等. 这就使人怀疑是否一切无穷集合的基数都是一样的，都是 $\aleph_0$. 下边的康托定理给出否定的回答.

§4 可数集合的主要性质

定理 17.5 任一可数集合 S 的无穷子集合 S_1 仍然是一可数集合. 即：若 $\bar{\bar{S}}=\aleph_0$, $S_1\subset S$, S_1 无穷，则 $\bar{\bar{S}}_1=\aleph_0$.

证明 因为 S 可数，即有双射函数 f, 使 $f:N\to S$, 故

$$S=\{f(0), f(1), \cdots, f(n), \cdots\cdots\},$$

可以把 S 改写成 $S=\{a_0, a_1, \cdots a_n, \cdots\cdots\}$，因为 S_1 是无穷子集合，故 $S_1=\{f(m_0), f(m_1), \cdots f(m_n), \cdots\cdots\}$，或记作 $S_1=\{a_{m_0}, a_{m_1}, \cdots, a_{m_n}, \cdots\cdots\}$. 这样，由下表

$$\begin{array}{cccccc} 0, & 1, & 2, & \cdots & n, & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ a_0, & a_1, & a_2, & \cdots & a_n, & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ a_{m_0}, & a_{m_1}, & a_{m_2}, & \cdots & a_{m_n}, & \cdots \end{array}$$

建立了一个双射函数 $g:\omega\to S_1$，即 $\bar{\bar{S}}_1=\aleph_0$.

定理 17.6 一可数集合 S 或附加上一有穷集合，或删去其中的有穷个元素，结果仍为可数集合.

证明 我们仅证明定理的第一部分，第二部分是类似的.

设 $S=\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$，现附加上的有穷集合的元素为 $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_m$，不妨假定 $b_i\,(0\leqslant i\leqslant m)$ 都与 S 中元素不相同，所得到的集合为

$$S_1=\{b_0, b_1, \cdots, b_m, a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\},$$

设 $f:N\to S$ 为双射函数，定义 $g:\omega\to S_1$ 如下：

$$g(i)=\begin{cases} b_i, & \text{当 } 0\leqslant i\leqslant m \\ a_{i-m-1} & \text{当 } m+1\leqslant i \text{ 且 } i\in\omega. \end{cases}$$

显然，g 是 ω 与 S_1 之间的一双射函数，这就证得了 S_1 为可数集合.

定理 17.7 二个可数集合之并，还是一可数集合.

证明 设

$$S_1 = \{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\},$$
$$S_2 = \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}.$$

不妨假定 S_1 与 S_2 不交(即它们没相同的元素),其并集合可作如下排列:

$$a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n, \cdots$$

这就是说,当 $f_1: \omega \to S_1$, $f_2: \omega \to S_2$ 为二个双射函数时,我们定义 f 为

$$f(n) = \begin{cases} f_1(K), & \text{当有 } K \in \omega, n = 2K \\ f_2(K), & \text{当有 } K \in \omega, n = 2K + 1. \end{cases}$$

显然 $f: \omega \to S_1 \cup S_2$ 是一双射函数,这就证明了定理 17.7.

定理 17.8 可数无穷多个可数集合的并集合,仍然是一可数集合.

证明 不妨假定这些集合都是两两不交的,它们的元素为

$$S_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1n}, \cdots\},$$
$$S_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots, a_{2n}, \cdots\},$$
$$S_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \cdots, a_{3n}, \cdots\},$$
$$\cdots\cdots$$

而 $S := S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots\cdots$, 将 S 的元素如下排列:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}, & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}, & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}, & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}, & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \qquad (17.3)$$

在上述元素的排列(17.2)中，由左上端开始，其每一斜线上的每一元素的足码之和都相同，且依次为 2，3，4，5，…，各斜线上元素的个数依次为 1，2，3，4，…. 这样(17.2)依次排列为

$$a_{11},\ a_{21},\ a_{12},\ a_{31},\ a_{22},\ a_{13},\ \cdots \tag{17.3}$$

由(17.3)可以建立 S 与 ω 的双射函数.

我们还可用另一方法来考察 S 的可数性. 为此，先定义自然数的一无穷子集合 T 如下：

$$T:=\{x \mid \text{有 } n\in\omega,\ m\in\omega \text{ 且 } n>1,\ m>1 \text{ 使得 } x=2^n\cdot 3^m\}.$$

显然，T 是一无穷集合，并且 T 中元素是由 n 与 m 唯一决定的，所以是可数的.

对于任一 $x\in T$，我们令 $(x)_0$ 表示 x 的 2 的指数，$(x)_1$ 表示 x 的 3 的指数，亦即 $x=2^{(x)_0}\cdot 3^{(x)_1}$. 我们定义 $f:T\to S$ 如下：令 $f(x)=a_{(x)_0(x)_1}$，由我们对 T 与 S 的规定，f 为一双射函数，且因为 T 可数，所以 $\bar{\bar{S}}=\aleph_0$.

§5　实数集合 R 是不可数的

定理 17.9　集合 $[0,1]$ 是不可数的.

证明　假定 $[0,1]$ 是可数的，并且枚举它们的元素为 a_1，a_2，a_3，a_4，$\cdots$，并把它们都表成十进制无尽小数形式：

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots \tag{17.4}$$

便可表示为：

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 0.p_{11}p_{12}p_{13}p_{14}\cdots \\ a_2 &= 0.p_{21}p_{22}p_{23}p_{24}\cdots \\ a_3 &= 0.p_{31}p_{32}p_{33}p_{34}\cdots \\ a_4 &= 0.p_{41}p_{42}p_{43}p_{44}\cdots \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \tag{17.5}$$

现在构造一数 q，其小数形式为 $0.q_1q_2q_3q_4\cdots$，我们逐步检查(17.5)式的对角线上的数 p_{nn}，$0 \leqslant p_{nn} \leqslant 9$，若 $p_{nn} \neq 5$，则令 $q_n = 5$；若 $p_{nn} = 5$，则令 $q_n = 4$．这样，就有

$$4 \leqslant q_n \leqslant 5.$$

并且 q 与 (17.4) 中的任一数都不相同，但 $q \in [0, 1]$，这说明 (17.4) 未能枚举完$[0, 1]$中的数，与题设矛盾，所以$[0, 1]$是不可数的.

定义 17.7 我们把集合 $[0, 1]$ 的基数记作 $\aleph$，即 $\aleph := \overline{\overline{[0,1]}}$，有时记做 c.

定理 17.10 令 $a \in R$, $b \in R$，且 $a < b$，则 $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, (a, b) 的基数都是 $\aleph$.

证明 令 $f(x) = a + (b - a)x$，显然 f 为 $[0, 1] \longrightarrow [a, b]$ 的一双射函数，这就证明了 $[a, b]$ 的基数也是 $\aleph$. 由于任一无穷集合删去有穷个元素仍然与原来集合一一对应，从而知 $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) 的基数也都是 $\aleph$.

定理 17.11 对于任意的自然数 n，n 个基数为 $\aleph$ 的两两不相交的集合之并集合，其基数仍然是 $\aleph$.

证明 令 n 个两两不交集合

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \quad S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$$

并且 $\bar{\bar{S}}_i = \aleph$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 我们将半闭区间 $[0, 1)$ 用点

$$a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = 1$$

分成 n 个半闭区间 $[a_{i-1}, a_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 每一个半闭区间的基数都是 $\aleph$, 所以可以使 $[a_{i-1}, a_i)$ 与 S_i 做成一一对应. 又因 $[0, 1)$ 为这些小半闭区间之并集合, 所以 S 与 $[0, 1)$ 一一对应, 定理得证.

定理 17.12 全体实数所组成的集合 R 的基数也是 $\aleph$.

证明 因为 R 可分割成可数无穷个半闭区间之并集合, 例如

$$R = \bigcup_{k \in \omega} \{[k-1, k) \cup [-k, -k+1)\}, \quad (17.6)$$

而区间 $(0, 1)$ 可依下列方式分割成可数无穷个半闭区间之并集合:

$$(0, 1) = \bigcup_{k \in \omega} \left\{\left(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+1}\right)\right\}. \quad (17.7)$$

由定理 17.10,

$$\left(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+1}\right) \quad 与 \quad [k-1, k) \cup [k, -k+1)$$

是对等的, 所以, 由 (17.6) 与 (17.7) 可以获得 R 与开区间 $(0, 1)$ 对等, 即 $\bar{\bar{R}} = \aleph$.

注 1 数学中有一个著名的问题称为连续统假设, 简记做 CH, 可以陈述为

$$\forall S(S \subset R \to (\bar{\bar{S}} \leqslant \aleph_0 \text{ 或 } \bar{\bar{S}} = \bar{\bar{R}})).$$

这是一百年前康托尔的猜想, 1900 年在巴黎召开的国际数学家会议上, 著名数学家希尔伯特 (Hilbert) 提出 23 个未解决

的数学问题中的第一个问题，1929年哥德尔证明：如果通常的集合论公理系统是协调的，那么加上 CH 后，仍然是协调的．换言之，通常集合论公理系统不能推演出 CH 的否定式．1963年科恩（Cohen）证明：如果通常集合论公理系统是协调的，那么在该系统内加上 CH 的否定式仍然是协调的．换言之，通常集合论公理系统不能推演出 CH．哥德尔和科恩的结果表明 CH 与通常集合论公理系统是独立的．CH 是否成立呢？至今仍然是一个未解决的问题．

习　　题

1．对于 $n>0$，令

$$F_n:=\{y \mid y \text{ 为多项式 } a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

其中 $a_0, a_1, \cdots a_n$ 都是有理数，且 $a_n \neq 0\}$，求集合 F_n 的势．

2．令 C 表示复数的集合，即

$$C:=\{x \mid \exists a \in R \exists b \in R(x=a+bi) \wedge i=\sqrt{-1}\}.$$

求 C 的势？

3．令 $P_0:=\{f \mid f \text{ 为一函数}, \operatorname{dom}(f) \subset N \text{ 且 } \operatorname{ran}(f) \subset\{0,1\}\}$．求集合 P_0 与集合 $P(\omega)$ 的势的关系．

4．F_n' 是把第1题中的“有理数”改为“实数”所获得的 n 元实系数多项式集合，求 F_n' 的势．

5．令 G 为所有代数数的集合，证明 G 是可数的．

6．证明：$\overline{\overline{p(\omega)}}=\overline{\overline{[0,1]}}$．

7．令 u 为无理数集合，证明 u 是不可数的．

附录　集合论的公理系统

在现代集合论中，有许多不同的集合论公理系统，最著名的一个系统是由蔡梅罗（Zermelo）1908 年提出的，后来经过弗兰克尔（Fraenkel）和斯科伦（Skolem）等人的改进而建立起来的．人们称之为 ZF 系统．略述如下：

1．外延公理

一集合是由它的元素决定的．即

$$\forall x\forall y(\forall z(z\in x\longleftrightarrow z\in y)\rightarrow x=y).$$

2．空集合存在公理

存在一个没有任何元素的集合，即 $\exists x\forall y(y\notin x)$，空集合记作 $\varnothing$．

3．无序对集合存在公理

对于任意的集合 x，y，都有一集合 z，集合 z 的元素恰好是 x 与 y，即

$$\forall x\forall y\exists z\forall u(u\in z\longleftrightarrow u=x\vee u=y).$$

此公理中的集合 z，我们记做 $\{x, y\}$． 当 $x=y$ 时，就是 $\{x\}$，这时称 $\{x\}$ 为 x 的单元集合．

4．并集合公理

对于任意的集合 x，都存在一集合 y，y 的元恰好就是集合 x 的所有元素的元素，即

$$\forall x\exists y\forall z(z\in y\longleftrightarrow\exists u(z\in u\wedge u\in x)).$$

此公理中定义的集合 y，记为 $\bigcup x$. 当 x 为 $\{x_1, x_2\}$ 时，$\bigcup\{x_1, x_2\}$ 可记作 $x_1\cup x_2$，并称它是集合 x_1 与 x_2 的简单并.

5. 幂集合公理

对于任意的集合 x，都有一个集合 y，y 的元素恰好是 x 的子集合，即

$$\forall x\exists y\forall z(z\in y\longleftrightarrow z\subset x).$$

其中 $$z\subset x:=\forall t(t\in z\to t\in x)$$

此公理中定义的集合 y，我们记做 $P(x)$，称 $P(x)$ 为集合 x 的幂集合.

下边的公理是断定在我们的论域中存在着一个集合，它有无穷多个元素.

6. 无穷集合存在公理或简称无穷公理

存在着一个集合，它的元素恰好是所有的自然数，这个集合我们记做 ω. 由 ω 的性质，我们有

$$0\in\omega\wedge\forall x(x\in\omega\to x+1\in\omega).$$

这一公理的另一种陈述方式是

$$\exists x(\varnothing\in x\wedge\forall y(y\in x\to y\cup\{y\}\in x)).$$

7. 分离公理模式或称子集合公理模式，对于任意给定的公式 $A(z)$，我们有

$$\forall x\exists y\forall z(z\in y\longleftrightarrow z\in x\wedge A(z)).$$

8. 替换公理模式

对于任意给定的公式 $A(x, y)$，我们有

$$\forall x\exists! yA(x, y)\to\forall t\exists s\forall u(u\in s\longleftrightarrow\exists z(z\in t\wedge A(z, u))),$$

其中

$$\forall x\exists ! yA(x, y) := \forall x\exists y(A(x, y)\wedge\forall z(A(x, z)\rightarrow z = y)),$$

9. 正则公理或称基础公理

$$\forall x(x \neq \varnothing \rightarrow \exists y(y \in x\wedge x\cap y = \varnothing)).$$

10. 选择公理

$$\forall x\forall y(y \in x \rightarrow y \neq \varnothing)\wedge\forall y\forall z(y \in x\wedge z \in x\wedge y \neq z \rightarrow y\cap z = \varnothing)\rightarrow\exists c\forall y(y \in x \rightarrow \exists ! t(t \in y\wedge t \in c)\wedge\forall t \in c\exists ! z \in x(t \in z)).$$

上述十条公理就是 ZF 公理系统. 由于第七、八两条是公理模式,对于任一公式都有一条相应的公理,因此,上述公理系统是由无穷条公理组成的.

注 1 在参考文献[3]中,我们曾把选择公理写做

$$\forall x\forall y(y \in x \rightarrow y \neq \varnothing)\wedge\forall y\forall z(y \in x\wedge z \in x\wedge y \neq z \rightarrow y\cap z = \varnothing)\rightarrow\exists c\forall y(y \in x \rightarrow \exists ! t(t \in y\wedge t \in c)).$$

也许有人问,这两条公理是否等价呢? 我们说,在 ZF 中它们是等价的. 只须使用分离公理就可由后者获得前者,当然由前者可以直接获得后者.

注 2 上述十条不是独立的,比如由替换公理可以导出分离公理,但由于分离公理使用方便,而且也由于它的历史意义(蔡梅罗在 1908 年已给出分离公理)通常还是保留了分离公理. 在文献中,常常把 1—7, 9—10 记做 Z, 称为蔡梅罗系统,有时也把 1—9,记做 ZF 系统,而 1—10 记做 ZFC 系统.

参 考 文 献

[1] 胡世华,古典谓词演算,数学进展,1964 第四期.

[2] 王宪钧,数理逻辑引论,北京大学出版社,1982.

[3] 张锦文,集合论与连续统假设浅说,上海教育出版社,1980.

[4] Karel Hrebacek and Thomas Jech, Introduction to Set Theory, Marcel Deker, Inc., 1978.

[5] Herbert B. Enderton, Elements of Set Theory. Academic Press, 1977.

[General Information]
书名=集合论浅说
作者=张锦文编著
页数=310
SS号=10186584
出版日期=

目录
正文